

****

**عنوان:**

مفاهیم مربوط به پیاده سازی حلگر جریان‌های تراکم پذیر و معادلات حاکم سه بعدی

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **نویسندگان** | مرتضی نامور |  |
| **تاریخ تنظیم سند** | 7/1/1397 | |
| **شناسه سند** | **MC5F001F1** | |

**فهرست مطالب**

[فصل 1- معادلات حاکم بر جریان سیال 2](#_Toc513366388)

[1-1- معادلات حاکم بر جریان هوا 2](#_Toc513366389)

[1-2- معادلات حاکم بر جریان غیر لزج 5](#_Toc513366390)

[1-3- معادلات حاکم بر جریان آرام 6](#_Toc513366391)

[1-4- معادلات حاکم بر جریان مغشوش بر اساس مدل های آشفتگی RANS 7](#_Toc513366392)

[1-4-1- متوسط گیری معادله جرم 8](#_Toc513366393)

[1-4-2- متوسط گیری از معادله مومنتوم 8](#_Toc513366394)

[1-4-3- متوسط گیری از معادله انرژی 8](#_Toc513366395)

[1-4-4- مدل‌سازی توربولانس 9](#_Toc513366396)

[1-4-5- کوپل کردن معادلات توربولانسی و معادلات RANS 10](#_Toc513366397)

[1-5- معادلات حاکم بر جریان مغشوش جهت شبیه‌سازی گردابه های بزرگ 11](#_Toc513366398)

[1-5-1- جایگاه روش گردابه های بزرگ در شبیه‌سازی جریان‌های اغتشاشی 12](#_Toc513366399)

[1-5-2- متوسط مکانی با استفاده از فیلتر 13](#_Toc513366400)

[1-5-2-1- فیلتر جعبه‌ای 14](#_Toc513366401)

[1-5-2-2- فیلتر گوسی 14](#_Toc513366402)

[1-5-3- معادلات حاکم جهت حل عددی با رهیافت LES 16](#_Toc513366403)

[1-5-3-1- بقای جرم 16](#_Toc513366404)

[1-5-3-2- بقای ممنتم خطی 17](#_Toc513366405)

[1-5-3-3- بقای انرژی 19](#_Toc513366406)

[1-5-4- معادلات نهایی حاکم به‌صورت فیلتر شده‌ی جرمی برای جریان تراکم پذیر 23](#_Toc513366407)

[فصل 2- بی بعد سازی معادلات 26](#_Toc513366408)

[2-1- بی بعد سازی معادلات حاکم بر جریان آرام 27](#_Toc513366409)

[2-1-1- بی بعد سازی معادله جرم 27](#_Toc513366410)

[2-1-2- بی بعد سازی معادله مومنتوم 27](#_Toc513366411)

[2-1-3- بی بعدسازی معادله انرژی 28](#_Toc513366412)

[2-1-4- بی بعد سازی معادله مربوط به لزجت مولکولی 29](#_Toc513366413)

[2-1-5- بی بعد سازی معادله گاز کامل 29](#_Toc513366414)

[2-2- بی بعد سازی معادلات حاکم بر جریان آشفته 30](#_Toc513366415)

[2-2-1- بی بعد سازی معادلات حاکم بر جریان آشفته با روش شبیه سازی گردابه های بزرگ 31](#_Toc513366416)

[فصل 3- دیدگاه‌های حل معادلات ناویر-استوکس 32](#_Toc513366417)

[3-1- دیدگاه حل عددی چگالی محور 32](#_Toc513366418)

[فصل 4- ساختار داده‌ای ذخیره شبکه 34](#_Toc513366421)

[4-1- روش حجم محدود 34](#_Toc513366422)

[4-2- مقایسه ساختار داده‌ای ضلع-مبنا و سلول-مبنا 36](#_Toc513366423)

[فصل 5- گسسته‌سازی مکانی معادلات 40](#_Toc513366424)

[5-1- گسسته‌سازی بخش‌های جابجایی 42](#_Toc513366425)

[5-2- بخش‌های پخش شوندگی 43](#_Toc513366426)

[5-3- افزایش دقت گسسته‌سازی 43](#_Toc513366427)

[فصل 6- گسسته‌سازی بخش زمانی معادلات 47](#_Toc513366428)

[6-1- روش‌های صریح 47](#_Toc513366429)

[6-1-1- روش اویلر 48](#_Toc513366430)

[6-1-2- روش رانگ کوتا 50](#_Toc513366431)

[6-1-3- روش رانگ کوتا اصلاح شده توسط جیمسون 52](#_Toc513366432)

[6-1-4- روش رانگ کوتا فلبرگ 54](#_Toc513366433)

[6-1-5- روش‌های چندگامی 56](#_Toc513366434)

[6-2- پایداری، سازگاری و همگرایی 57](#_Toc513366435)

[6-2-1- تحلیل سازگاری 60](#_Toc513366436)

[6-2-2- تحلیل پایداری فون نیومن 61](#_Toc513366437)

[6-3- عدد کورانت و تعیین گام زمانی 68](#_Toc513366438)

[6-3-1- گام ‌زمانی موضعی و افزایش سرعت همگرایی 71](#_Toc513366439)

[6-4- روش‌های صریح-ضمنی 76](#_Toc513366440)

[6-4-1- پدیده‌ی پراکندگی در محاسبات و استهلاک مصنوعی 77](#_Toc513366441)

[6-4-2- روش اویلر صریح-ضمنی 78](#_Toc513366442)

[6-4-3- روش رانگ کوتا صریح-ضمنی 79](#_Toc513366443)

[6-4-4- روش‌های پیش‌بینی و تصحیح 81](#_Toc513366444)

[6-4-5- تحلیل سازگاری 83](#_Toc513366445)

[6-4-6- تحلیل پایداری 85](#_Toc513366446)

[6-4-7- تعیین گام زمانی 90](#_Toc513366447)

[6-5- روش‌های ضمنی 90](#_Toc513366448)

[فصل 7- استخراج معادلات حاکم بر جریان با مرزهای متحرک 91](#_Toc513366449)

[7-1- روش‌های توضیف حرکت 94](#_Toc513366450)

[7-1-1- دیدگاه‌های لاگرانژی و اویلری 94](#_Toc513366451)

[7-1-2- توصیف سینماتیکی ALE 96](#_Toc513366452)

[7-2- معادله اساسی ALE 99](#_Toc513366453)

[7-2-1- مشتق‌های زمانی دامنه‌های مادی، فضایی و مرجع 99](#_Toc513366454)

[7-2-2- مشتق زمانی از انتگرال‌ها بر روی حجم‌های متحرک 102](#_Toc513366455)

[7-3- بیان معادلات حاکم بر جریان تراکم پذیر بصورت دیدگاه ALE 103](#_Toc513366456)

[7-3-1- فرم دیفرانسیلی معادلات بقا از دیدگاه ALE 103](#_Toc513366457)

[7-3-2- فرم انتگرالی معادلات بقا از دیدگاه ALE 104](#_Toc513366458)

[7-4- قانون بقا هندسی (GCL) 105](#_Toc513366459)

[7-5- بدست آوردن سرعت شبکه و شار اضلاع متحرک 106](#_Toc513366460)

[7-6- معادلات حاکم بر جریان سیال از دیدگاه ALE 107](#_Toc513366461)

مراجع.......................................................................................................................................................................................................................................111

**چکیده:**

در این گزارش به مفاهیم و معادلات مربوط به حل جریان های تراکم پذیر پرداخته شده است. ابتدا معادلات ناویر استوکس که معادلات پایه ای مربوط به سیالات می باشد آورده شده است و به انواع مختلف این معادلات که برای جریان های غیرازج، آرام و معادلات متوسط گیری شده رینولدز (RANS) و همچنین معادلات فیلتر شده (LES) پرداخته می شود. همچنین به نحوه کوپل کردن معادلات توربولانسی به معادلات جریان اصلی بررسی شده است. در ادامه به بی بعد سازی معادلات جهت آماده سازی برای حل عددی پرداخته شده است. یکی از نکات مهم در حل عددی گسسته سازی میدان محاسباتی می باشد که از آن بعنوان شبکه محاسباتی یاد می شود بنابراین باید یک دیدگاه جامع و کارآمد برای ذخیره سازی شبکه محاسباتی در نظر گرفته شود که در این گزارش علاوه بر بررسی دیدگاههای مختلف، نحوه کار با ساختارهای داده ای شبکه محاسباتی آورده شده است. از آنجا که در این گزارش به حل عددی معادلات با دیدگاه حجم محدود پرداخته می شود ساختار داده ای حاکم در دیدگاهای مختلف برری شده است. همچنین علاوه بر نحوه گسسته سازی مکانی بخش های مختلف معادلات در دیدگاه حجم محدود، به انواع گسسته سازی زمانی معادلات اعم از صریح، صریح-ضمنی و ضمنی پرداخته می شود. در انتها به نحوه استخراج معادلات حاکم بر جریانهای با مرزهای متحرک پرداخته شده و بطور مفصل این مفاهیم بررسی شده است.

# معادلات حاکم بر جریان سیال

شکل کلی و کامل معادلات حاکم بر جريان سیال، معادلات ناوير-استوکس می­باشد که بر اساس قانون پيوستگی (بقاء جرم)، قانون دوم نيوتن (بقاء مومنتوم) و قانون بقاء انرژی برای محيط پيوسته استخراج می شوند. سه معادله بقا مورد نیاز، بیان می دارند که خاصیت‌های اساسی جرم، مومنتم و انرژی در سراسر جریان سیال نه بوجود می‌آیند و نه از بین می‌روند. تنها نحوه پخش‌ این خاصیت ‌های اساسی تغییر می‌کند و یا اینکه این خاصیت‌ها به یکدیگر تبدیل می‌شوند[[1]](#footnote-1). قانون دوم ترمودینامیک به این نکته اشاره دارد که خاصیت اساسی آنتروپی هیچگاه کاهش نمی‌یابد. معادله حالت نیز به طور واضح نوع و طبیعت گاز را توصیف می‌نماید. اعمال نمودن تاثیر ویسکوزیته در معادلات بقای مومنتم و انرژی معادلات ناویر استوکس[[2]](#footnote-2) را برای جریان تراکم پذیر ارائه می‌دهد که کامل ترین معادلات برای بیان دینامیک گازها می‌باشند. در ادامه به بررسی معادلات حاکم بر جریان هوا پرداخته خواهد شد.

## معادلات حاکم بر جریان هوا

از آنجا که شکل تنسوری معادلات ناویر-استوکس در بیشتر منابع معتبر مورد استفاده قرار گرفته و همچنین برای معادلات متوسط گیری شده رینولدز و بیان معادلات مربوط به مدلسازی توربولانسی نیز مناسبتر است، در اینجا این شکل از معادلات استفاده می گردد. شکل تنسوری معادلات ناویر-استوکس بصورت زیر می باشد [1]

|  |  |
| --- | --- |
| (1) |  |

روابط بالا چگالي،  بردار سرعت، فشار، انرژي کل، زمان و  علامت کرونیکر مي­باشد و در حالتی که  باشد ، و زمانی که  باشد برقرار است. همچنین تانسور تنش کششی می باشد که به صورت زیر معرفی می شود:

|  |  |
| --- | --- |
| (2) |  |

 تانسور کرنش[[3]](#footnote-3) و  لزجت مولکولی می باشد، که از رابطه شبه تجربی ساترلند[[4]](#footnote-4) بدست می آید.[2]

|  |  |
| --- | --- |
| (3) |  |

در این رابطه((3)) لزجت مولکولی در دمای مطلق  می باشد. در اینجا ثابت ساترلند برابر 110.4 در نظر گرفته شده است که این مقدار در مقاله [3] مورد استفاده قرار گرفته شده است اما باید بخاطر داشت که در مرجع[2] این مقدار برابر 120 بوده است و این موضوع بدلیل اینست که مقدار اشاره شده به نوع و دمای گاز وابسته می باشد. روابط زیادی برای محاسبه لزجت مولکولی وجود دارد که هر کدام کاربر ویژه ای دارد. برای مطالعه بیشتر در مورد روابط مربوط به [4, 5]محاسبه لزجت مولکولی می توان به مرجع مراجعه نمود. بردار شار حرارتي نیز بصورت زير تعريف می­شود که در آنضریب هدایت حرارتی می باشد. [6]

|  |  |
| --- | --- |
| (4) |  |

در رابطه بالاعدد پرنتل می باشد که مقدار آن برای هوا و جریان آرام برابر 0.72 می باشد و cp ضریب حرارتی ویژه در فشار ثابت است. در اینجا از فرض آدیاباتیک بودن مرزهای دیوار استفاده می گردد و بنابراین شار حرارتی در این مرزها برابر صفر است. با دقت در معادلات ناویر-استوکس می توان به این نتیجه رسید که تعداد مجهولات یعنی  یک واحد بیشتر از تعداد معادلات می باشد، بنابراین برای رسیدن به یک سیستم معادلات قابل حل باید یک معادله دیگر نیز وجود داشته باشد که در این حالت از معادله حالت استفاده می گردد. معادله حالت نوع سیال را توصیف می‌کند و سعی بر آن دارد تا شرایط ترمودینامیکی سیال را مورد توجه قرار دهد. شرایط ترمودینامیکی سیال توسط سه خاصیت ترمودینامیکی آن سیال مشخص می‌گردد. خواص ترمودینامیکی سیال از جمله آنتالپی و انرژی درونی، متوسطی از خواص میکروسکوپی سیال را به دست می‌دهند که بر خلاف خواص مکانیکی مانند سرعت و انرژی جنبشی که خواص ماکروسکوپیک سیال را توصیف می‌نمایند، می باشد.

برای معین نمودن تمام خواص ترمودینامیکی به بقای سه خاصیت جرم، مومنتم و انرژی در سطح میکروسکوپی نیاز است. مطابق معمول، تمام خاصیت ها در دینامیک گازها به عنوان خاصیت مشخصه بیان می گردند. به عبارت دیگر بر واحد جرم تقسیم می‌شوند. از آنجا که جرم تقسیم بر واحد جرم برابر با یک می‌شود، تنها قوانین بقا برای دو خاصیت باقیمانده دیگر باید محاسبه گردند. به عبارتی این معادلات را می‌توان همانند معادلات بقا برای خواص ماکروسکوپی، معادله حالت را می‌توان معادلات بقا در مقیاس میکروسکوپی در نظر گرفت. با این فرض که برخورد مستقیم تنها راه انتقال مومنتم است، اعمال بقای مومنتم در مقیاس میکروسکوپی منجر به قانون گاز ایده آل و یا معادله حالت گرمایی می‌گردد:

|  |  |
| --- | --- |
| (5) |  |

که R ثابت عمومی گازها می‌باشد. سیالی که معادله (5)را ارضا نماید از نظر گرمایی گاز کامل محسوب می‌شود. با شرایط مشابه و اعمال قانون بقای انرژی در سطح میکروسکوپی منجر به معادله (6)می‌گردد:

|  |  |
| --- | --- |
| (6) |  |

یا بصورت برابر داریم:

|  |  |
| --- | --- |
| (7) |  |

در سمت راست معادلات (6) و ‏0(7)دو ثابت وجود دارند که به ترتیب عبارتند از گرمای ویژه در حجم ثابت و فشار ثابت. گازهایی که قانون بقای انرژی در سطح میکروسکوپی یا به عبارت دیگر معادلات (6)و (7)را ارضا می‌نمایند از نظر انرژی، گاز کامل محسوب می‌گردند. در ادامه تعدادی از تعریف ها و روابط مفید برای گازهای‌ کامل آورده می‌شود. [6] نسبت ثابت گرمای ویژه در فشار ثابت به حجم ثابت، نسبت گرمای ویژه گفته می‌شود:

|  |  |
| --- | --- |
| (8) |  |

ثابت گاز نیز توسط معادله ‏0 به گرماهای ویژه مرتبط می‌شود:

|  |  |
| --- | --- |
| (9) |  |

با استفاده از روابط مطرح شده می‌توان انرژی داخلی را به عنوان تابعی از فشار تعریف نمود:

|  |  |
| --- | --- |
| (10) |  |

بنابراین انرژی نهایی برابر خواهد شد با :

|  |  |
| --- | --- |
| (11) |  |

سرعت صوت برابر است با نسبت سرعت پخش اغتشاشات کوچک درون یک ماده (مانند اغتشاشات آکوستیک) به سرعت حرکت ماده.

|  |  |
| --- | --- |
| (12) |  |

## معادلات حاکم بر جریان غیر لزج

پرنتل در سال 1902 کشف کرد که برای جریان هایی که عدد رینولدز آنها به اندازه کافی بالا باشد، اثرات مهم لزجت به یک لایه مرزی بسیار نازک در نزدیکی مرزهای جامد محدود می شود. یکی از نتایج این کشف این بود که می توان ناحیه غیرلزج جریان را مستقل از لایه مرزی حل کرد. البته باید به خاطر داشت که باید ضحامت لایه مرزی در مقایسه با مشخصات میدان جریان بسیار کوچک باشد تا بتوان از تداخل لایه مرزی و ناحیه غیرلزج میدان جریان صرفنظر کرد. اگرچه در حالتی که نتوان از تداخل لایه مرزی و ناحیه غیرلزج جریان صرفنطر کرد نیز می توان معادلات این دو ناحیه را بصورت جداگانه حل نمود اما باید این حل در یک پروسه سعی و خطا انجام گیرد. البته این دیدگاه در برخی از موارد ناکارآمد است و از معادلات دیگری استفاده می گردد.

در ادامه معادلاتی که تنها در ناحیه غیرلزج اعتبار دارد مورد بررسی قرار خواهد گرفت. این معادلات با حذف بخش های لزج و انتقال حرارت از معادله ناویر-استوکس بدست می آید. معادله بدست آمده برای ناحیه غیرلزج با هزینه محاسباتی کمتری نسبت به معادله ناویر-استوکس حل خواهد شد. هرچند در برخی از منابع این معادله را معادلات اویلر می گویند اما باید بخاطر داشت که معادله اویلر در واقع معادله مومنتوم برای جریان های غیرقابل تراکم است.

حل معادلات حاکم بر جریان غیرلزج بدلیل سادگی فیزیک و همچنین پایین بودن هزینه محاسباتی، برای اعتبارسنجی اولیه برنامه های مربوط به حوزه دینامیک سیالات محاسباتی اهمیت خاصی دارد. همچنین برخی مواقع که توزیع اولیه ای از فشار بر روی اجسام هوافضایی لازم است می توان برای کارهای مهندسی از این نوع شبیه سازی میدان جریان استفاده نمود.

از دیدگاه توسعه کدهای حلگر سیالاتی می توان گفت با حل این معادلات می توان از گسسته سازی بخش جابجایی که در واقع مهمترین بخش معادلات حاکم بر جریان سیال از نظر نحوه مدلسازی می باشد، مطمئن شد. علاوه بر این با حل این معادلات می توان انواع گسسته سازی بخش زمانی معادلات را بررسی نمود. بنابراین پس از حذف بخش های لزج و انتقال حرارت از معادلات ناویر-استوکس، معادله زیر برای جریان های غیرلزج بدست می آید که شکل تنسوری آن بصورت زیر است:

|  |  |
| --- | --- |
| (13) |  |

## معادلات حاکم بر جریان آرام

در برخی از رژیم های جریان که عدد رینولدز آنها به اندازه کافی پایین می باشد، عملا بخش توربولانسی با تقریب خوبی برابر صفر بوده و جریان حالت آرام (غیرآشفته) دارد. در این موارد بدون استفاده از مدلسازی توربولانسی، معادلات حل می شود. همچنین باید در نظر داشت که بیشتر جریان های آیرودینامیکی دارای اعداد رینولدز بالایی می باشند و بنابراین نمی توان این نوع معادلات را برای تحلیل جریان های واقعی آیرودینامیکی بکار برد اما حل این معادلات جهت اعتبارسنجی کد کامپیوتری و اطمینان از صحت گسسته سازی و پیاده سازی معادلات بکار برده می شود.

معادلات حاکم بر جریان آرام همان معادلات متوسط گیری شده رینولدز ولی با صرف نظر کردن از بخش های توربولانسی می باشد. حل معادلات حاکم بر جریان آرام بدلیل صرف نظر کردن از بخش های توربولانسی و در نتیجه پایین بودن هزینه محاسباتی، برای اعتبارسنجی اولیه برنامه های مربوط به حوزه دینامیک سیالات محاسباتی اهمیت خاصی دارد. همچنین جهت اطمینان از صحت گسسته سازی بخش پخش شوندگی می توان از این نوع شبیه سازی میدان جریان استفاده نمود.

شکل تنسوری این معادلات حاکم بر جریان آرام با شکل متوسط گیری نشده معادلات ناویر-استوکس یکسان و بصورت زیر است:

|  |  |
| --- | --- |
| (14) |  |

## معادلات حاکم بر جریان مغشوش بر اساس مدل های آشفتگی RANS

یکی از خصوصیات جریان های مغشوش تغییرات شدید متغیرهای تصادفی می باشد که باعث می شود مقیاس زمانی و مکانی این جریان ها کوچک باشد. بنابراین جهت شبیه سازی چنین جریان هایی که دارای مقیاس زمانی بسیار کوچکی می باشند، تعداد نقاط مورد نیاز به حدی زیاد می شود که تنها برای هندسه های ساده و جریان های ساده این امر امکان پذیر است. یکی از راه هایی که می توان یک جریان مغشوش را طوری شبیه سازی کرد که "اثر تغییرات نامنظم نوسانات بر روی جریان اصلی" دیده شود، استفاده از متوسط گیری رینولدز است. برای جریان تراکم پذیر از متوسط گیری "favre" استفاده می شود که در آن چگالی تاثیر دارد و از بوجود آمدن متغیرهای توربولانسی در معادله جرم جلوگیری می شود و همچنین همبستگی های سه تایی مانند  به همبستگی های دوتایی تبدیل می شود. این متوسط گیری بصورت زیر انجام می شود:

|  |  |
| --- | --- |
| (15) |  |

همچنین از متوسط گیری رینولدز که اساس روش بالا می باشد عبارت های زیر صادق است:

|  |  |
| --- | --- |
| (16) |  |

با اعمال متوسط گیری اشاره شده هر کدام از معادلات بصورت زیر متوسط گیری می شوند.

### متوسط گیری معادله جرم

با اعمال متوسط گیری فیور معادله جرم بصورت زیر متوسط گیری می شود. همانگونه که در شکل متوسط گیری شده این معادله مشاهده می شود، هیچ بخش نوسانی که نیاز به مدل سازی داشته باشد در این معادله ظاهر نشده است.

|  |  |
| --- | --- |
| (17) |  |

### متوسط گیری از معادله مومنتوم

با اعمال متوسط گیری فیور معادله مومنتوم به شکل زیر در می آید:

|  |  |
| --- | --- |
| (18) |  |

همانگونه که در شکل متوسط گیری شده این معادله مشخص است عبارت نامعلوم  در این معادله ظاهر شده است که با استفاده از روابط گفته شده برای متوسط گیری رینولدز می توان آن را بصورت زیر نوشت:

|  |  |
| --- | --- |
| (19) |  |

بنابراین معادله مومنتوم متوسط گیری شده بصورت زیر خواهد بود:

|  |  |
| --- | --- |
| (20) |  |

### متوسط گیری از معادله انرژی

همانند معادله مومنتوم، معادله انرژی پس از متوسط گیری بصورت زیر در می آید:

|  |  |
| --- | --- |
| (21) |  |

در این معادله نیز جمله نامعلوم  ظاهر شده است که با استفاده از روابط مربوط به متوسط گیری رینولدز می توان آنها را بصورت زیر بازنویسی کرد:

|  |  |
| --- | --- |
| (22) |  |

بنابراین معادله متوسط گیری شده انرژی بصورت زیر خواهد بود:

|  |  |
| --- | --- |
| (23) |  |

### مدل‌سازی توربولانس

بطور خلاصه معادلات متوسط گیری شده ناویر-استوکس پس از متوسط گیری زمانی بصورت زیر خواهد بود:

|  |  |
| --- | --- |
| (24) |  |

با مقایسه معادلات(1)و (24)مشاهده می شود که در فرآیند متوسط گیری از معادلات ناویر-استوکس، جمله جدید  در معادله مومنتوم ظاهر می شود که به این جمله تنش های رینولدز یا تنش های توربولانسی گفته می شود. همچنین در معادله انرژی جمله  ظاهر شده است. این بخش ها در معادلات متوسط گیری شده ناویر-استوکس مجهول می باشند.

اگر جهت حل این جملات مجهول باز از معادلات ناویر-استوکس استفاده شود، جملات مجهول جدیدی ظاهر می شود (این موضوع در توربولانس "closure problem" نامیده می شود). بنابراین مجهولات را با استفاده از معادلات مستقل دیگر مدل می کنند که به آن مدل سازی توربولانس گفته می شود.

یکی از اولین تلاش ها برای مدل سازی تنش های رینولدز توسط بوزینسک در 1877 انجام شد. او تنش های رینولدز را به کرنش متوسط[[5]](#footnote-5) وابسته ساخت. همچنین او در مقایسه با لزجت مولکولی، لزجت توربولانسی  را معرفی کرد که در بر گیرنده اطلاعات مربوط مشخصات توربولانسی جریان است. بنابراین با این فرض می توان تنش های رینولدز را به صورت زیر نوشت:

|  |  |
| --- | --- |
| (25) |  |

همچنین برای مدل سازی ترم مجهول در معادله انرژی پارامتر جدیدی بنام  عدد پرنتل توربولانسی معرفی شد که در نتیجه تنش های گرمایی توربولانسی[[6]](#footnote-6) بصورت زیر مدلسازی شد. بنابراین خواهیم داشت:

|  |  |
| --- | --- |
| (26) |  |

در رابطه بالا  عدد پرنتل توربولانسی می باشد که مقدار آن برای هوا برابر 0.9 است. همچنین باید توجه نمود که جمله  طبق معادله‏0(25) تعریف می شود.

بنابراین بطور خلاصه و با دقت در معادلات بالا مشاهده می شود که مجهول اصلی در هنگام مدل سازی جریان توربولانس  و  می باشد. یادآور می شود که  خاصیت سیال نیست و تابعی از جریان می باشد و برای بدست آوردن آن از مدل سازی توربولانسی استفاده می شود.

### کوپل کردن معادلات توربولانسی و معادلات RANS

همانطور که قبلا مشاهده شد در فرآیند متوسط گیری از معادلات ناویر-استوکس جمله مجهولی در معادله پیوستگی پدید نیامد و فقط در معادلات مومنتوم و انرژی این جملات مجهول ظاهر شدند. در هنگام حل عددی باید معادلات متوسط گیری شده و معادلات توربولانسی همزمان و به صورت کوپل شده حل شوند. در ادامه نحوه کوپل کردن این معادلات آورده می شود.

الف -معادله مومنتوم

در معادله مومنتوم  و  به صورت زیر تعریف شده اند:

|  |  |
| --- | --- |
| (27) |  |
| (28) |  |

با کمی ساده سازی جبری می توان نوشت:

|  |  |
| --- | --- |
| (29) |  |

بنابراین معادله مومنتوم را می توان به صورت زیر نوشت:

|  |  |
| --- | --- |
| (30) |  |

مشاهده می شود که کوپل کردن معالات توربولانسی و معادله مومنتوم شامل اضافه کردن  به در ترم لزج و همچنین اضافه کردن  به کل معادله می باشد.

ب -معادله انرژی

معادله انرژی را می توان به صورت زیر نوشت:

|  |  |
| --- | --- |
| (31) |  |

مشاهده می شود که هنگام کوپل کردن معادلات توربولانسی و معادله انرژی علاوه بر اضافه کردن  به  باید  به و همچنین  به کل معادله انرژی اضافه شود.در اینجا باید توجه شود که برخی از مدل های توربولانسی مانند روش های جبری قادر به محاسبه بخش  نبوده و تنها به محاسبهاکتفا می کنند که در اینگونه مدل های توربولانسی تنها باید را به معادلات جریان اصلی اضافه نمود.

## **معادلات حاکم بر جریان مغشوش جهت شبیه‌سازی گردابه های بزرگ**

با متوسط­گیری مکانی به کمک فیلتر، می­توان گردابه­های بزرگ را از گردابه­های کوچک جدا نموده و به‌طور مستقیم مورد بررسی قرار داد. در عوض گردابه­های کوچک از فیلتر عبور نموده و به‌طور مستقیم در معادلات ظاهر نمی­شوند. طبق نظریه­ی آبشار انرژی، درحالی‌که گردابه­های بزرگ با اتلاف کم به راه خود ادامه می­دهند (به‌واسطه‌ی بالا بودن عدد رینولدز)، انرژی که از جریان متوسط به ناحیه­ی فعال در گردابه­های بزرگ وارد و ذخیره شده­ بود بایستی در گردابه­های کوچک تلف شود. چون به هنگام حرکت گردابه­های بزرگ، اتلاف انرژی به‌صورت هم‌زمان، در گردابه­های کوچک به‌ویژه در مقیاس کولموگوروف روی می­دهد، لذا گردابه­های کوچک به­وسیله­ی مدل­هایی در مقیاس زیرشبکه[[7]](#footnote-7)، بایستی به­ نحوی مدل شوند که تعادل در نظریه­ی آبشار انرژی برقرار گردد. ممکن است این سؤال مطرح گردد، که آیا روش گردابه­های بزرگ، روشی ریاضی یا روش عددی است؟ یک پاسخ محتمل آن است که در وهله­ی اول، روشی ریاضی است، چون ابتدا معادلات حاکم فیلتر شده و سیستم معادلات جدیدی نتیجه می­گردد. البته، ردپای فیلتر به‌صورت صریح اصلاً دیده نمی­شود! معادلات جدید، بایستی با همه­ی روش­های متداول در مکانیک سیالات محاسباتی قابل گسسته سازی و حل باشند. البته نکته­ی ظریف که نبایستی دور از ذهن داشت آن است که احتمالاً همه­ی روش­های متداول عددی، سازگاری لازم با فلسفه­ی روش گردابه­های بزرگ را ندارند. در عوض، بایستی از روش­هایی استفاده کرد که سازگاری بیشتری دارند.

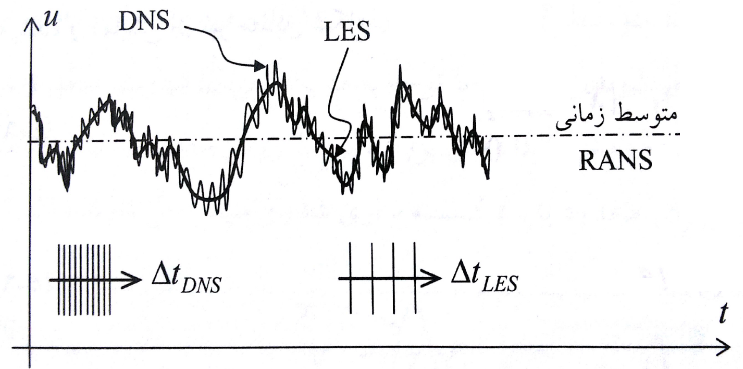
روش شبیه­سازی گردابه­های بزرگ، برای اولین بار، در دهه­ی 70 میلادی «73-1970» توسط دیردورف[[8]](#footnote-8) مطرح گردید.[7]اما برای اولین بار، توسط کیم[[9]](#footnote-9) و معین[[10]](#footnote-10) در سال 1982 با شرایط مرزی تکرار شونده[[11]](#footnote-11) به کار گرفته شد.[8]

### جایگاه روش گردابه ­های بزرگ در شبیه‌سازی جریان‌های اغتشاشی

حل معادلات حاکم بر جریان سیالات «ناویر-استوکس» در حال حاضر در دست نیست. به تعبیر برخی محققان این معادلات در مقابل ‌حل ریاضی مقاومت می­کنند! ظاهراً شبیه­سازی عددی، تنها چاره­ی ممکن در شرایط فعلی و احتمالاً تا آینده غیرقابل‌پیش‌بینی است. در این صورت، بایستی میدان پیوسته­ی جریان سیال به یک میدان گسسته تبدیل گردد و سپس با یک روش عددی «کامپیوتری» مناسب حل گردد. اما دقت حل بستگی به پیچیدگی میدان جریان سیال دارد. طبق نظریات ارائه ­شده توسط کولموگوروف امروزه، یکی از سه را­ه­حل زیر را انتخاب می­نمایند:

* استفاده از معادلات متوسط گیری شده زمانی ناویر-استوکس[[12]](#footnote-12)
* متوسط­گیری مکانی با استفاده از فیلتر و روش گردابه­های بزرگ
* شبیه­سازی عددی مستقیم[[13]](#footnote-13)

باور عمومی آن است که اولین روش عددی انتخابی که صرفه­ی اقتصادی داشته و با دقت مناسب قابل‌اجراست، متوسط­گیری زمانی از معادلات ناویر– استوکس است که نماد آن مدل می­باشد. گرچه روش شبیه­سازی مستقیم عددی می­تواند به‌عنوان بهترین روش مطرح باشد، اما در شرایط کنونی، استفاده از این روش محدود به جریان­هایی تا عدد رینولدز متوسط است. بنابراین، روش شبیه­سازی گردابه­های بزرگ، به‌عنوان یک انتخاب بهینه مطرح شده و هم‌اکنون تحقیقات گسترده­ای روی آن در حال انجام­شدن است. در ادامه، به مبانی اولیه­ی این روش پرداخته شده­است. در‏شکل (1) به‌طور نمادین، این سه روش با یکدیگر مقایسه شده­اند.



1. مقایسه­ نمادین سه روش توربولانسی DNS, LES و RANS

### متوسط مکانی با استفاده از فیلتر

چون رفتار کلی میدان جریان متأثر از گردابه­های بزرگ می­باشد، در آغاز، حرکت آن‌ها محاسبه می­شود. در این روش، همچنین فرض می­شود که تأثیر متقابل بین گردابه­های کوچک و بزرگ را می­توان برحسب گردابه­های بزرگ و مدل­های مقیاس زیرشبکه تخمین زد. زیرا بر اساس نظریه­ی آبشار انرژی، ذخیره­ی انرژی عمدتاً در گردابه­های بزرگ و اتلاف آن در گردابه­های کوچک انجام می­گردد. در این روش، یک متغیر عمومی از میدان جریان سیال، مانند g را می­توان به دو مؤلفه­ موسوم به مقیاس شبکه[[14]](#footnote-14)  و زیرشبکه تقسیم نمود، به‌طوری‌که می­باشد. مؤلفه­ی مقیاس شبکه را به‌صورت زیر محاسبه می­کنند:

|  |  |
| --- | --- |
| (32) |  |

در رابطه­ی(32)،  تابع فیلتر با مشخصه­ی  است که بایستی دارای خاصیت زیر باشد:

|  |  |
| --- | --- |
| (33) |  |

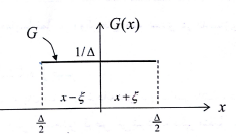
مشخصه­ی، ممان دوم تابع است که به‌صورت زیر به آن مربوط می­شود:

|  |  |
| --- | --- |
| (34) |  |

از مهم­ترین انواع فیلترها، می­توان از فیلتر جعبه­ای[[15]](#footnote-15) و فیلتر گوسی[[16]](#footnote-16) نام برد که در ادامه، معرفی می­شوند.

#### فیلتر جعبه‌ای

عبارت ریاضی معادل فیلتر جعبه­ای که کاربرد زیاد هم دارد، طبق رابطه­ی‏0(35) نوشته­شده و نمایش آن نیز مطابق ‏شکل (2) می­باشد.

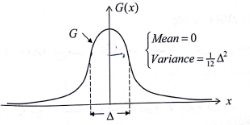


1. فیلتر جعبه‌ای

|  |  |
| --- | --- |
| (35) |  |
| (36) |  |

#### فیلتر گوسی

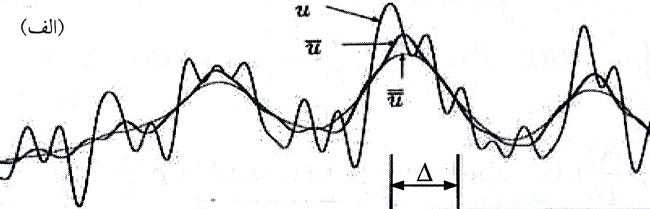
فیلتر گوسی تابعی پیوسته است که مطابق رابطه­ی(37) نوشته­شده و نمایش آن نیز مطابق ‏شکل (3) می­باشد:

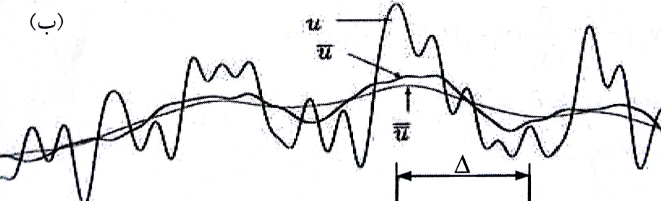


1. فیلتر گوسی

|  |  |
| --- | --- |
| (37) |  |

میدان سرعت u با استفاده از رابطه فیلترشده() و مطابق ‏شکل (4) برای دو مقدار متفاوت  نشان ­داده‌شده است. در حالت (الف) مقدار  کوچک و در حالت (ب) مقدار بزرگ انتخاب­شده­است. برخلاف روش متوسط­گیری زمانی، چون در روش گردابه­های بزرگ، متوسط­گیری مکانی صورت می­گیرد، لذا امکان متوسط­گیری مجدد نیز وجود دارد. مثلاً مطابق ‏شکل (4) ، می­توان مجدداً از  متوسط گرفت که نتیجه­ی­ آن () متفاوت، اما صاف­تر از است، معادلاتی که فیلتر می­شوند، می­توانند با توجه به فیزیک جریان، مهارت محقق و سازگاری بهتر روش عددی با فلسفه­ی روش گردابه­های بزرگ، توسط روش عددی مناسب«تفاضل محدود، حجم محدود، اجزای محدود یا ... گسسته سازی شده و سپس حل شوند.[7]





1. فیلتر کردن تابع u با دو مقدار متفاوت [9]

### معادلات حاکم جهت حل عددی با رهیافت LES

در جریان‌های تراکم پذیر برای جلوگیری از به وجود آمدن جملات مقیاس‌های زیرشبکه در معادله  
بقای جرم، بهتر است که از کمیته‌ای فیلترگیری شده فیوره استفاده شود. متغیر فیلترشده فیوره̃ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

|  |  |
| --- | --- |
| (38) |  |

ابتدا از معادلات حاکم شامل بقای جرم و بقای ممنتم خطی، به شرح زیر فیلتر­گیری جرمی[[17]](#footnote-17) می­گردد. در ادامه علامت (-) معرف کمیت فیلترگیری شده و علامت (~) نشان‌دهنده کمیت فیلترگیری شده فیوره می­باشد.

#### بقای جرم

|  |  |
| --- | --- |
| (39) |  |
| (40) |  |

در رابطه­ی بالا و روابط مشابه از شرط تعویض­پذیری بین دو اپراتور مشتق­گیری جزئی و انتگرال استفاده شده است. این کار به‌شرط اینکه از عبارات تحت عنوان Residual که زیر آن‌ها نوشته­ شده­است صرف‌نظر شود یا آن­ را به‌عنوان خطای عددی قطع­کردن[[18]](#footnote-18) در نظر بگیریم و خطای آن نیز از مرتبه خطای گسسته سازی به ترتیب ترم زمانی و جابه­جایی می­باشد، قابل انجام است.[10] همان‌گونه که از معادله بالا مشخص است مشتق زمانی به‌شرط استفاده از فیلتر همگن از آن عبور می‌کند.

|  |  |
| --- | --- |
| (41) |  |

بنابراین معادله جرم فیلترگیری شده به‌صورت زیر درمی‌آید:

|  |  |
| --- | --- |
| (42) |  |

#### بقای ممنتم خطی

|  |  |
| --- | --- |
| (43) |  |

بخش زمانی معادله مومنتوم به‌صورت زیر فیلترگیری می‌شود:

|  |  |
| --- | --- |
| (44) |  |
| (45) |  |
| (46) |  |

حال، سرعت uرا در رابطه­ی(46)برحسب مؤلفه­های شبکه و زیرشبکه باز نموده و به رابطه­ی (48) می­رسیم:

|  |  |
| --- | --- |
| (47) |  |
| (48) |  |

با توجه به چهار ترم ایجاد شده در رابطه­ی(48) ، روابط (49)تا(52) زیر به دست می­آیند:

|  |  |
| --- | --- |
| (49) |  |
| (50) |  | |
| (51) |  | |
| (52) |  | |

بقیه­ی ترم­های سمت راست معادله­ی(43)فیلترگیری می­شوند:

|  |  |
| --- | --- |
| (53) |  |
| (54) |  |
| (55) |  |

در رابطه­ی بالا، تابع فیلتر در نقطه­­ای به مختصاتاست، اما و مؤلفه­های فیلتر نشده و فیلتر شده‌ی i آم از نیروی حجمی است.ترم­های محاسبه­شده که در چهر معادله فوق ظاهر شده‌اند، در قالب معادله­ی فیلتر­گیری ­شده­ زیر ریخته می­شود:

|  |  |
| --- | --- |
| (56) |  |

برخلاف متوسط­گیری زمانی، در روش گردابه­های بزرگ ترم تنش ناشی از اغتشاش بسیار گسترده­تر و پیچیده­تر بوده و دارای اجزای شناخته­شده­ای است که به تفکیک ارائه شده­اند:‏0

|  |  |
| --- | --- |
| (57) |  |
| (58) |  |
| (59) |  |
| (60) |  |

#### بقای انرژی

لازم به ذکر است که در معادله­ی بقای انرژی در این بخش، از پارامتر آنتالپی استفاده شده است و چون در بخش­های پیشین این گزارش برای نوشتن معادله­ی بقای انرژی از پارامتر انرژی درونی استفاده شده است، لذا می­توان این دو پارامتر یعنی انرژی درونی بر واحد جرم () و آنتالپی بر واحد جرم () را به کمک معادله­ی حالت، با رابطه­ی(61)به هم ربط داد:

|  |  |
| --- | --- |
| (61) |  |
| (62) |  |
| (63) |  |
| (64) |  |
| (65) |  |

حال،  را در رابطه­ی(65)برحسب مؤلفه­های شبکه و زیرشبکه باز نموده و به رابطه­ی زیرمی­رسیم:

|  |  |
| --- | --- |
| (66) |  |
| (67) |  |

با توجه به چهار ترم ایجاد شده در رابطه­ی(67) ، روابط ‏0(68)تا(70) به دست می­آیند:

|  |  |
| --- | --- |
| (68) |  |
| (69) |  |
| (70) |  |
|  |  |

بقیه­ی ترم­های سمت راست معادله­ی(62)فیلترگیری می­شوند:

|  |  |
| --- | --- |
| (71) |  |

با توجه به ترم اول ایجاد شده در رابطه­ی (55)رابطه­ی(56) به دست می­آیند و بقیه به‌عنوان ترم­های زیر شبکه در نظر می­گیریم:

|  |  |
| --- | --- |
| (72) |  |

بقیه­ی ترم­های سمت راست معادله­ی(62) فیلترگیری می­شوند:

|  |  |
| --- | --- |
| (73) |  |

با توجه به ترم اول ایجاد شده در رابطه­ی(73)، رابطه­ی(74) به دست می­آیند و بقیه به‌عنوان ترم­های زیر شبکه در نظر می­گیریم:

|  |  |
| --- | --- |
| (74) |  |

بقیه­ی ترم­های سمت راست معادله­ی(62) فیلترگیری می­شوند:

|  |  |
| --- | --- |
| (75) |  |

ترم­های محاسبه­شده در قالب معادله­ی فیلتر­گیری ­شده­ی بقای انرژی به‌صورت زیر ریخته می­شود:

|  |  |
| --- | --- |
| (76) |  |

برخلاف متوسط­گیری زمانی، در روش گردابه­های بزرگ شار حرارتی از اغتشاش بسیار گسترده­تر و پیچیده­تر بوده و دارای اجزای شناخته­شده­ای است که به تفکیک ارائه شده­اند:

|  |  |
| --- | --- |
| (77) |  |
| (78) |  |
| (79) |  |
| (80) |  |

### معادلات نهایی حاکم به‌صورت فیلتر شده‌ی جرمی برای جریان تراکم پذیر

|  |  |
| --- | --- |
| (81) |  |
| (82) |  |
| (83) |  |

که در روابط (83) و(84)، تانسور تنش برشی ویسکوز فیلتر شده عبارت است از:

|  |  |
| --- | --- |
| (84) |  |
| (85) |  |
| (86) |  |

در معادلات فیلتر شده ممنتم و انرژی عبارت‌های  و  به ترتیب بیانگر تانسور تنش زیرشبکه و شار حرارتی زیرشبکه می‌باشند. این عبارات پس از متوسط گیری اولیه از معادلات حاکم به‌صورت روابط زیر درمی‌آیند:

|  |  |
| --- | --- |
| (87) |  |
| (88) |  |

در روش گردابه­های بزرگ، بین ابعاد شبکه­ی محاسباتی (h) و اندازه­ی فیلتر () رابطه­ی معینی برقرار است، که به این نسبت، نسبت فیلتر به شبکه[[19]](#footnote-19) نامیده می­گردد. مثلاً اگر این نسبت به 2 نزدیک شود و دقت گسسته سازی، مرتبه­ی 2 باشد، آنگاه خطای قطع­کردن نسبت به مقدار نیروی زیر شبکه‌ای زیاد می­شود، لذا برای کاهش آن پیشنهاد می­شود که این نسبت به بالاتر از 4 ارتقا یابد. اگر دقت گسسته سازی مرتبه­ی 4 باشد، این نسبت مقدار 2 باشد، کافی است، چون در بیشتر کدهای CFD از دقت گسسته سازی مرتبه 2 برای ترم جابه­جایی استفاده می­گردد و نسبت فیلتر به شبکه بین 1 و در بهترین حالت 2 می­باشد، لذا در صورت استفاده از روش LES با خطای نفوذ عددی[[20]](#footnote-20) مواجه خواهند بود. [10]در کلیه­ی مدل­های به­کارگرفته­ شده، اگر ابعاد شبکه­ی محاسباتی کوچک شود ()، مقدار تنش زیر شبکه‌ای نیز کوچک می­گردد(). درنتیجه، حل حاصل از معادلات حاکم که به‌صورت مکانی فیلتر شده­اند، به سمت حل مبتنی بر شبیه­سازی مستقیم عددی میل می­کند. در اکثر روش­های موفق و دارای دقت مکانی بالا، توجه دارند که به هنگام کاهش اندازه­ی شبکه­ی محاسباتی، مقیاس­های طولی تا اندکی بیشتر از اندازه­ی زیرلایه­ی اینرسی[[21]](#footnote-21) لحاظ شوند. همچنین، دستیابی به‌دقت لازم در روش شبیه­سازی گردابه­های بزرگ«LES» به­ویژه در جریان­هایی با عدد رینولدز بالا که در مجاورت دیوار جامد جدایی روی می­دهد، بسیار پرهزینه­ است.

در روش شبیه‌سازی گردابه‎های بزرگ (LES) سعی می‌گردد تا با ارائه یک مدل‌سازی توربولانسی، بخش‌های زیر شبکه پدیدار شده که ناشی از اعمال فیلتر هستند، مدل گردند. در جریان تراکم پذیر با اعمال فیلتر بر روی معادلات ناویر استوکس، دو بخش زیرشبکه که تأثیر بالاتری دارند، ظاهر می‌گردند. این بخش‌ها عبارت‌اند از تانسور تنش زیرشبکه و شار حرارتی زیرشبکه. در اینجا سعی می‌گردد تا با استفاده از جریان حاکم، این دو بخش‌ مدل گردند. برای بسته شدن سیستم معادلات نیاز است تا روابطی برای مدل‌سازی بخش‌های زیرشبکه ارائه گردند. بخش‌ زیر بعد از فیلتر کردن معادلات ظاهر شدند که بخش‌ تنش زیرشبکه  در هر دو معادله مومنتم و انرژی حضور دارد و بخش شار حرارتی زیرشبکه در معادله انرژی پدیدار می‌گردد. تنش‌های زیر شبکه بخش‌های بسته نشده هستند که باید برای آن‌ها مدل ارائه گردد. انواع مختلف مدل‌ها برای بیان نمودن این بخش‌ ارائه شده‌اند. مدل‌های ویسکوزیته گردابه‌ای[[22]](#footnote-22) سعی دارند تا تبادل انرژی را بین مقیاس‌های کوچک و بزرگ با استفاده از شبیه‌سازی فروریزش انرژی مرتبط با آبشار انرژی توربولانسی، بازتولید نمایند. اولین مدل و یکی از معروف‌ترین این مدل‌ها و رایج‌ترین آن‌ها فرضیه بوزینسک است که برای جریان تراکم ناپذیر ارائه شد: [11]

|  |  |
| --- | --- |
| (89) |  |

که  بیان کننده ویسکوزیته توربولانسی (سینماتیکی) و  تانسور نرخ کرنش است.در روش WALE، ویسکوزیته توربولانسی از رابطه­ی (90)محاسبه می‌گردد:

|  |  |
| --- | --- |
| (90) |  |

که  برابر است با:

|  |  |
| --- | --- |
| (91) |  |

|  |  |
| --- | --- |
| (92) |  |

که در آن k ثابت فون کارمن، d حداقل فاصله گره از دیواره، Cw ضریب 0.325 و V حجم سلول است. و همچنین :

|  |  |
| --- | --- |
| (93) |  |

# بی بعد سازی معادلات

یکی از ملاحظات حل عددی، بی بعد سازی آنها می باشد. بطور خلاطه بی­بُعد سازی باعث می­شود که بخش های مختلف معادلات هم مرتبه شده و در نتيجه خطاهای گرد کردن کاهش پيدا کند. پارامترهای مختلفی برای بی بعدسازی معادلات حاکم بر جریان استفاده می گردد[6]. در اینجا از پارامتر های زیر جهت بی بعد سازی معادلات استفاده شده است:

|  |  |
| --- | --- |
| (94) |  |

در روابط بالا c نشاندهنده سرعت صوت می باشد. بی بعدسازی زمان و انرژی کل بصورت زیر انجام می شود:

|  |  |
| --- | --- |
| (95) |  |
| (96) |  |

در روابط بالا پارامتر های \* دار معرف کمیت های بعد دار و زیرنویس ∞ بیانگر کمیت های جریان آزاد می باشد. همچنین مقدار پارامتر \*ℓ می تواند هر طول دلخواهی باشد که کاربر باید آن را تعیین نماید ولی معمولا مقدار آن را برابر طول ایرفویل در نظر می گیرند. باید دقت کرد که از این طول در بی بعد سازی شبکه محاسباتی استفاده شده باشد. در ادامه بی بعد سازی هر کدام از معادلات آورده می شود.

## بی بعد سازی معادلات حاکم بر جریان آرام

در اینجا ابتدا به بی بعد سازی هر کردام از معادلات ناویر-استوکس پرداخته می شود و در انتها پارامترهای بی بعد تمام معادلات آورده خواهد شد.

### بی بعد سازی معادله جرم

با بکارگیری پارامترهای بی بعدسازی اشاره شده در روابط (94) تا ‏0(96) معادله جرم بصورت زیر در می آید:

|  |  |
| --- | --- |
| (97) |  |

### بی بعد سازی معادله مومنتوم

همانند معادله جرم، پس از بکارگیری پارامترهای بی بعدسازی اشاره شده معادله مومنتوم بصورت زیر بی بعد می شود:

|  |  |
| --- | --- |
| (98) |  |

ابتدا تانسور تنش بصورت زیر بی بعد می شود:

|  |  |
| --- | --- |
| (99) |  |

بنابراین می توان معادلات مومنتوم را بصورت زیر بی بعد سازی نمود:

|  |  |
| --- | --- |
| (100) |  |

با استفاده از معادله ‏0(101) وکمی عملیات جبری می توان معادله مومنتوم را بصورت زیر بازنویسی نمود:

|  |  |
| --- | --- |
| (101) |  |

با بکارگیری معادلات مربوط به ضرایب بی بعد عدد ماخ و عدد رینولدز که در زیر آمده است، می‌تواند معادله بالا را بصورت زیر بازنویسی نمود:

|  |  |
| --- | --- |
| (102) |  |
| (103) |  |

### بی بعدسازی معادله انرژی

همانند معادله جرم و مومنتوم، معادله انرژی نیز بصورت زیر بی بعد می شود:

|  |  |
| --- | --- |
| (104) |  |

برای بی بعد سازی این معادله ابتدا بردار شار حرارتی بصورت زیر بی بعد می شود:

|  |  |
| --- | --- |
| (105) |  |

همچنین تانسور کرنش بصورت زیر بی بعد می گردد:

|  |  |
| --- | --- |
| (106) |  |

بنابراین بی بعد سازی معادله انرژی بصورت زیر انجام می شود:

|  |  |
| --- | --- |
| (107) |  |

همانند آنچه برای معادله مومنتوم انجام شد با بکارگیری روابط مربوط به ضرایب بی بعد عدد ماخ و عدد رینولدز، می تواند معادله انرژی را بصورت بی بعد شده بصورت زیر بازنویسی نمود:

|  |  |
| --- | --- |
| (108) |  |

### بی بعد سازی معادله مربوط به لزجت مولکولی

|  |  |
| --- | --- |
| (109) |  |

### بی بعد سازی معادله گاز کامل

در اینجا باید دقت کرد که معادله مربوط به گاز کامل نیز باید بی بعد گردد. از آنجا که از این معادله برای بدست آوردن دما استفاده خواهد شد خواهیم داشت:

|  |  |
| --- | --- |
| (110) |  |

بنابراین بطور خلاصه معادلات مربوط به جریان آرام پس از اعمال پارامترهای بی بعدسازی بصورت زیرمی باشد:

|  |  |
| --- | --- |
| (111) |  |

همانگونه که مشاهده می شود اعداد بی بعد ماخ و رینولدز در این معادلات بوجود می آید. در اینجا لازم است توجه شود که جهت حل عددی معادلات بی بعد شده، باید مشخصات جریان دور دست و همچنین مقداردهی اولیه مقادیر جریان بصورت بی بعد به پروسه حل معرفی شود. بنابراین پس از همگرا شدن معادلات جهت بدست آوردن مقادیر واقعی (بعد دار) جریان، باید هر کدام از مقادیر بدست آمده در پارامتر مورد استفاده در بی بعد سازی ضرب شود.

**تذکر:**

در حالت غیر لزج ترم های تنش برشی در معادله(98) برابر صفر خواهد بود بنابراین در معادله (102)اعداد بدون بعد ماخ و رینولدز را نخواهیم داشت و این ترم ها صفر هستند. همچنین در معادله انرژی(107) اعداد بدون بعد ماخ و رینولدز مشابه معادله ممنتوم صفر خواهند بود . بنابراین به‌طور خلاصه معادلات مربوط به جریان غیر لزج زیر می‌باشد:

|  |  |
| --- | --- |
| (112) |  |

## بی بعد سازی معادلات حاکم بر جریان آشفته

در اینجا باید توجه کرد که معادلات بصورت بی بعد می باشند. بنابراین متغیر های توربولانسی نیز باید بصورت بی بعد شده به این معادلات معرفی شوند که این بمعنی آنست که باید معادلات توربولانسی نیز همانند معادلات جریان اصلی و با همان پارامترهای بی بعدسازی، بی بعد شوند. تنها تفاوت اساسی با معادلات بی بعد شده همان طور که در قسمت پیشین ذکر گردید اضافه شدن ترم  به لزجت سیال و حضور ترم اضافه شده ی در معادلات به واسطه ی معادلات آشفتگی می باشد.

### بی بعد سازی معادلات حاکم بر جریان آشفته با روش شبیه سازی گردابه های بزرگ

در بی بعد سازی معادلات حاکم با روش شبیه سازی گردابه های بزرگ در معادله مومنتوم ترم اضافه  را برای تنش های برشی خواهیم داشت ، هم چنین در معادله انرژی نیز این ترم در قسمت تنش های برشی اضافه خواهد شد بعلاوه ترم اضافه ی  را در قسمت شار های حرارتی خواهیم داشت. بنابر این شکل نهایی بی بعد شده معادلات حاکم با اعمال فیلتر های ذکر شده در قسمت های پیشین بصورت زیر خواهد بود :

|  |  |
| --- | --- |
| (113) |  |

# دیدگاه‌های حل معادلات ناویر-استوکس

## دیدگاه حل عددی چگالی محور

اگر از قوانین تنسوری برای بدست آوردن معادلات ناویراستوکس در مختصات کارتزین استفاده گردد، شکل دو بعدی این معادلات بصورت زیر در می آید:

|  |  |
| --- | --- |
| (114) |  |

برای حل عددی، شکل ماتریسی این معادلات بکار برده می شود که بصورت زیر نوشته می شوند:

|  |  |
| --- | --- |
| (115) |  |

هر کدام از بخش های این معادله بصورت زیر می باشد:

|  |  |
| --- | --- |
| (116) |  |

در ادامه بردار سرعت در جهت و بردار سرعت در جهت می باشدو W بردار سرعت در جهت z است. پس از حل معادلات بالا که بوسیله چگالی به همدیگر وابسته شده اند، چهار متغیر بدست خواهد آمد. با استفاده از مقدار انرژی کل و رابطه(114)مقدار فشار در میدان بدست می آید و برای بدست آوردن مقدار دما از معادله گاز کامل استفاده خواهد شد.

با دقت در معادلات فوق، پس از حل این معادلات، متغیرهای ماتریس W یعنی  بدست خواهد آمد که با قرار دادن مقدار در سه پارامتر دیگر مقادیر بدست می آید. بنابراین در اینجا از پارامتربرای وابسته کردن چهار معادله بالا استفاده می شود که به این نوع وابسته کردن معادلات اصطلاحا "چگالی محور[[23]](#footnote-23)" گفته می شود. واضح است که در اعداد ماخ پایین که جریان بصورت غیرقابل تراکم در می آید، از این نوع حل عددی نمی توان استفاده نمود و یا همگرا شدن حل به تاخیر می افتد. این موضوع به این دلیل است که مقدار چگالی که بعنوان متغیر وابسته بین این معادلات بکار برده شده است، بصورت یک ثابت در می آید و وابسته شدن معادلات از بین می رود. در این موارد از مقدار فشار برای وابسته کردن معادلات استفاده می گردد که به آن دیدگاه "فشار محور[[24]](#footnote-24)" گفته می شود. بحث در این مورد در این گزارش انجام نخواهد شد.

تذکر :

با اعمال مدل شبیه سازی گردابه های بزرگ با توجه به مطالب ذکر شده در قسمت های پیشین رابطه (115) دارای ترم های اضافه ای خواهد بود که بشرح زیر می باشد:

|  |  |
| --- | --- |
| (117) |  |

# ساختار داده‌ای ذخیره شبکه

## روش حجم محدود

به منظور حل عددي معادلات حاكم بر جريان سيال، ابتدا باید میدان حل و همچنین معادلات به شکل مناسبي گسسته سازي شده تا بتوان حل عددي آنها را بر روي شبكة محاسباتي بدست آورد. بنابراین بخش هایی كه داراي مشتقات مكانی می باشند باید بصورت مکانی و بخش هایی که دارای مشتقات زمانی می باشند بصورت زمانی گسسته شوند. دقت الگوريتم حل عددي بستگي كامل به دقت گسسته سازي هاي مكاني و زماني آن دارد.

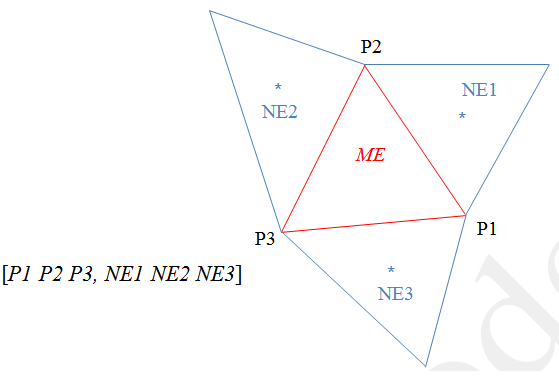
براي گسسته سازي مكاني معادلات سه روش كلي وجود دارد، روش اختلاف محدود، ‌روش المان محدود و روش حجم محدود. در هر يك از این روش ها معادلات ديفرانسيل حاكم تبديل به يك دستگاه معادلات جبري شده كه با حل آن پاسخ نهايي جريان بدست مي آيد. همچنين بردار شارها را مي‌توان با استفاده از روابط مرتبة اول، دوم و يا بالاتر تخمين زد كه بر اين اساس الگوريتم هاي مختلفي براي هر يك از این روش ها ارائه شده است.

در گزارش حاضر گسسته سازي ميدان جريان با استفاده از شبكة بي سازمان انجام می گیرد و گسسته سازي معادلات حاكم با استفاده از روش حجم محدود كه داراي انعطاف پذيري خوبي بر روي اين گونه شبكه ها مي‌باشد، انجام شده است. بطور كلي الگوريتم هاي حل معادلات جريان به روش حجم محدود بر روي شبكة بي سازمان به دو صورت سلول محور[[25]](#footnote-25) و گره محور[[26]](#footnote-26) (‏شکل (5) )می باشد. در دیدگاه اول نقطة كنترلي (نقطه‌اي كه خواص جريان در آن محاسبه مي‌شود) نقطة وسط سلول ‌بوده و در دیدگاه دوم رئوس سلول ها بعنوان نقاط كنترلي براي ذخيرة‌ اطلاعات در نظر گرفته مي‌شوند. در اینجا از دیدگاه سلول محور استفاده می شود، بنابراین مقادیر جریان بر روی مرکز سلول ها ذخیره می گردد.

|  |
| --- |
|  |
|  |
| 1. مقایسه دیدگاه سلول محور و ضلع محور |

## مقایسه ساختار داده‌ای ضلع-مبنا و سلول-مبنا

ساختار داده ای برای ذخیره شبکه محاسباتی می تواند به دو صورت ضلع محور[[27]](#footnote-27) یا سلول محور[[28]](#footnote-28) در نظر گرفته شود. در ساختار داده ای سلول محور اطلاعات سلول ها و در دومی اطلاعات اضلاع شبکه برای گسسته سازی معادلات و محاسبه شارها مورد استفاده قرار می گیرد.



1. ساختار داده ای سلول محور

در ساختار داده ای ضلع محور اطلاعات اضلاع شبکه برای گسسته سازی معادلات و محاسبه شارها مورد استفاده قرار می گیرد. از آنجا که ساختار داده ای ضلع محور نیاز به حجم حافظه کمتر و همچنین انعطاف پذیری بیشتری برای استفاده از شبکه ترکیبی[[29]](#footnote-29) دارد، در اینجا از این نوع ساختار داده ای استفاده خواهد شد. در این ساختار داده ای اطلاعات شبکه بصورت زیر ذخیره می شود:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| (الف) | )ب) |

1. نحوه ذخیره اطلاعات شبکه سه بعدی زمانی که وجه مورد نظر (الف) سه ضلعی و (ب) چهارضلعی باشد.

|  |  |
| --- | --- |
| FaceType = 3 (شکل الف) | FaceType = 4 (شکل ب) |
| ME: سلول چپ (Main Element)  NE: سلول راست ( Neighboring Element)  P1: نقطه ابتدایی  P3: نقطه انتهایی | ME: سلول چپ (Main Element)  NE: سلول راست ( Neighboring Element)  P1: نقطه ابتدایی  P4: نقطه انتهایی |

: *ME*سلول سمت چپ (*Main Element*)

: NEسلول سمت راست (Neighboring Element)

: *P1* نقطه ابتدایی ضلع

: *P2* نقطه انتهایی ضلع

ترتیب قرار گیری نقاط در جهت پادساعتگرد می­باشد که توجه به آن بسیار ضرویست. سلول اصلی، سلول سمت چپ و سلول همسایه سلول سمت راست وجه مشخص شده می باشد. در واقع می توان گفت که سلول اصلی سلولی می باشد که وجه مربوط به آن می باشد و بنابراین محاسبات برای آن انجام می شود. اگر انگشتان دست در جهت ساعت­گرد قرار گیرند، جهت شصت دست جهت سلول اصلی را نشان خواهد داد. در شبکه سه بعدی نیاز به آگاهی از نوع اضلاع هستیم. به همین دلیل یک پارامتر (FaceType) نسبت به حالت دو­بعدی به اطلاعات شبکه اضافه خواهد شد که تعداد اضلاع هر یک از وجوه را نمایش می­دهد.

برای آشنایی بیشتر با نحوه انجام محاسبات در ساختار داده ای ضلع محور و سلول محور و مقایسه کارایی این دو دیدگاه، مثال زیر می تواند بسیار مفید باشد:

فرض کنید لازم است مقدار تابع F (این تابع می تواند هر کمیتی مانند مقدار مشتق و یا بخش جابجایی معادلات باشد) در مرکز سلول های شبکه محاسبه گردد.

|  |  |
| --- | --- |
| (118) |  |

در رابطه بالا زیرنویس j نشان دهنده مقدار یک کمیت در اضلاع شبکه، N بردار عمود بر اضلاع سلول هاست و جهت آن بسمت خارج هر سلول می باشد و Nedge تعداد اضلاع یک سلول می باشد. همچنین فرض کنید مقدار با استفاده از یک میانگین گیری از مقادیر ذخیره شده از مرکز سلول ها بصورت زیر محاسبه شود:

|  |  |
| --- | --- |
| (119) |  |

که ME و NE دو سلول مجاور یک ضلع می باشد.

* ساختار داده ای سلول محور:

در این دیدگاه محاسبات بر روی تمام سلول ها شبکه در یک حلقه تکرار انجام شده و مقدار رابطه (118) برای هر سلول با یک حلقه تکرار دیگر بر روی تمام اضلاع آن سلول بدست می آید.



* ساختار داده ای ضلع محور:

در اینجا محاسبات در یک حلقه تکرار بر روی اضلاع شبکه انجام شده و برای محاسبه رابطه(118) این مقدار برای هر ضلع محاسبه و به دو سلول مجاور آن ضلع اضافه می گردد (البته در این مثال از آنجا که بردار عمود بر اضلاع شبکه در محاسبات وارد شده است باید مقدار محاسبه شده با علامت منفی به سلول سمت راست اضافه گردد تا جهت بردار عمود برای سلول سمت راست نیز بسمت خارج آن باشد).



با مقایسه تعداد محاسبات در این دو دیدگاه مشاهده می شود که تعداد محاسبات در ساختار داده ای ضلع محور به نصف کاهش می یابد.

# گسسته‌سازی مکانی معادلات

در روش حجم محدود اولين قدم براي گسسته سازي معادلات حاكم، انتگرال‌گيري از شكل بقايي معادلات بر روي حجم كنترل می باشد. برای اینکار معادله(115) را در نظر بگیرید. با انتگرال گیری از این رابطه بر روی یک سطح بسته که در اینجا همان سلول محاسباتی می باشد خواهیم داشت:

|  |  |
| --- | --- |
| (120) |  |

مقدار *W* در یک سلول محاسباتی مشخص نیست و این مقدار باید محاسبه شود. همچنین باید در نظر داشت که در واقع این مقدار در نواحی مختلف یک سلول محاسباتی متغیر است. جهت ساده سازی یک مقدار میانگین با بکارگیری قضیه مقدار میانی بر روی سلول محاسباتی برای مقادیر *W* بصورت زیر تخمین زده می شود:

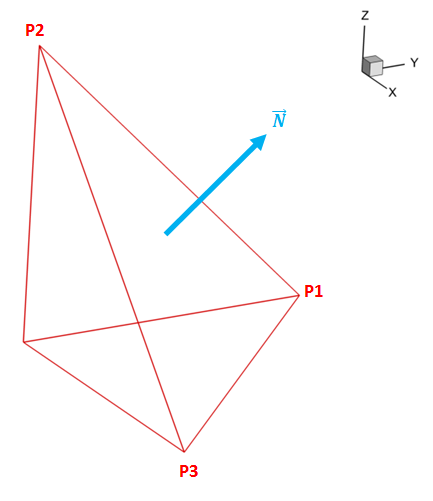
|  |  |
| --- | --- |
| (121) |  |

همچنین با استفاده از قضیه گوس می توان انتگرال مکانی روی یک سطح را به انتگرال روی مرزها تبدیل نمود. [12](‏شکل (8) )

|  |  |
| --- | --- |
| (122) |  |

در این رابطه *ds* طول قطاع های تشکیل دهنده مرزهای حجم کنترل می باشد و n بردار عمود (بسمت خارج از حجم کنترل) بر این قطاع ها می باشد که از روابط زیر قابل محاسبه است:

|  |  |
| --- | --- |
| (123) |  |



1. تبدیل انتگرال روی مساحت به انتگرال روی مرز

توجه شود که علامت منفی بدلیل اینست که باید بردار n به سمت خارج از حجم کنترل باشد. بدلیل اینکه در رابطه ‏0 (125)بردار نرمال در مقدار طول ضلع مربوطه ضرب می شود اینکار در اینجا انجام می شود. بنابراین خواهیم داشت :

|  |  |
| --- | --- |
| (124) |  |

بنابراین انتگرال یک کمیت برداری در یک حجم کنترل بصورت گسسته شده زیر محاسبه می گردد:

|  |  |
| --- | --- |
| (125) |  |

در رابطه بالا nedge تعداد قطاع های تشکیل دهنده سلول محاسباتی می باشد. حال اگر بردارهای شار جابجایی را بصورت برداری در نظر بگیریم:

|  |  |
| --- | --- |
| (126) |  |

بنابراین با استفاده از دو قضیه اشاره شده می توان معادله(120) را بصورت زیر بازنویسی کرد:

|  |  |
| --- | --- |
| (127) |  |

در رابطه بالا nface تعداد وجوه تشکیل دهنده سلول محاسباتی می باشد. حال اگر بردارهای شار جابجایی را بصورت برداری در نظر بگیریم:

|  |  |
| --- | --- |
| (128) |  |

بنابراین با استفاده از دو قضیه اشاره شده می توان معادله(128)را بصورت زیر بازنویسی کرد:

|  |  |
| --- | --- |
| (129) |  |

همچنین باید توجه نمود که این معادلات برای هر کدام از سلول های محاسباتی از نظر مکانی گسسته شده است و پس از محاسبه آن برای تمام سلول ها باید گسسته سازی زمانی نیز انجام گیرد که در ادامه بطور مفصل به آن پرداخته خواهد شد.

## گسسته‌سازی بخش‌های جابجایی

برای محاسبه این بخش که شارهای غیر لزج هستند دو روش کلی مرسوم است. یک دسته از روش ها مبتنی براستفاده از اختلاف مرکزی بوده و دسته دیگر مبتنی بر استفاده از خواص بالادست جریان می­باشد.در **روشهای مبتنی بر بالادست جریان**، باتوجه به ماهیت بخش جابجایی از یک گسسته سازی وابسته به جهت جریان استفاده می­شود. نکته مشترک در روشهای این خانواده داشتن ترم استهلاک ذاتی می­باشدکه از ایجاد نوسانات ناخواسته در جریان جلوگیری می­کند و مانع از رشد آنها می­شود. همچنین در این خانواده انتشار و ذخیره سازی خواص فیزیکی با توجه به جهت انتشار خطوط مشخصه خواهد بود به عبارت دیگر این خانواده بصورت هوشمند بر فیزیک جریان تطابق دارد. **در روش ها مبتنی براستفاده از اختلاف مرکزی،** یک الگوریتم انفصال مرکزی با دقت مرتبه دوم مورد استفاده قرار می­گیرد، با توجه به دقت گسسته­سازی روش­ های­این خانواده که دارای پراش عددی هستند وجود ترم استهلاک مصنوعی جهت ملایم کردن نوسانات عددی الزامی است از این رو این روش ها را گاها روش های اتلاف مصنوعی نیز نامگذاری می­کنند. همچنین به دلیل استفاده از یک تفاضل مرکزی بین وجوه سلول ها ارتباط کمتری بین فیزیک جریان وجهت انتشار خواص فیزیکی در این دسته از روش ها به نسبت روش های بالادست وجود دارد.

## بخش‌های پخش شوندگی

برای محاسبه بخش های پخش شوندگی باتوجه به ماهیت این ترم بطور معمول از تفاضل مرکزی بادقت مرتبه دوم استفاده می­شود.

## افزایش دقت گسسته‌سازی

روش های مختلف محاسبه شار غیرلزج با استفاده از مقادیر چپ و راست هر وجه این شار را محاسبه می کنند. مقادیر چپ و راست لزوما مقادیر ذخیره شده در مرکز سلول های چپ و راست هر وجه نیست، بلکه همان طور که قبلا عنوان شد میان یابی کمیت هایِ جریانی با استفاده از مقادیر سلول های مختلف به سمت چپ و راست هر وجه است.برای رسیدن به دقت های مکانی بالاتر باید همانند متد اختلاف محدود[[30]](#footnote-30) از مقادیر سلول های بیش تری برای میان یابی استفاده کنیم. با این کار کمیت های مختلف در داخل هر حجم کنترل را به جای ثابت گرفتن، درجه یک، دو و یا بیشتر در نظر می گیریم و در واقع با دخیل کردن اطلاعات سلول های بیشتری در میان یابی و گسسته سازی معادلات، فیزیک جریان را در روش عددی بیش تر دخیل می کنیم که خود باعث افزایش سرعت می شود.

روش‌های دقیق با مرتبه بالا برای محاسبه گرادیان در شبکه بندی‌های ساختار یافته مدت زیادی است که در روش‌های دیفراسیل محدود (FDM) ، المان محدود (FEM) و حجم محدود (FVM) مورد استفاده و بررسی قرار می‌گیرند. برای بررسی دقیق استفاده از گرادیان‌های با مرتبه بالا در شبکه با ساختار و برای کاربردهای دینامیک سیالات محاسباتی می‌توان به Ekaterinaris [13] مراجعه نمود.

در روش حجم محدود با شبکه بدون ساختار، محاسبه گرادیان‌های با مرتبه بالا نسبتا کمتر مورد توجه قرار گرفته است و بیشتر به محاسباتی با دقت مرتبه دوم اکتفا شده است که تنها نیاز به محاسبه گرادیان‌های مرتبه اول دارد. دو نمونه از متداول ترین روش‌ها برای محاسبه گرادیان های مرتبه اول روش Green-Gauss (GG) و روش Least-Square (LS) می باشند[14]. برای محاسبات با دقت مرتبه بالاتر Barth و Jespersen یک فرایند بازسازی گرادیان چند بعدی برای جریان غیر ویسکوز با مرتبه بالا ارائه نمودند که پیوستگی نیز در آن با اعمال محدود کننده (Limiter) حفظ شده است. بسیاری از روش‌هایی که در ادامه به آن‌ها اشاره می‌شود بر اساس همین روش توسعه یافته اند. روش مرتبه بالا K-exact توسط Barth و Fredrickson [15] توسعه یافته است. آن ها شرایط عمومی برای شماتیک‌های با دقت بالا را با توسعه یک فرایند بازسازی که سه شرط :

1-بقای میانگین (Mean Conservation) ،

2- دقت مرتبه k بودن (K-Exactness)

3- حمایت فشرده (Compact Support) را ارضا می‌کند، به دست آوردند.

همچنین روش‌هایی که به صورت عام برای شبکه با ساختار توسعه داده شده بودند مانند روش ENO [16-18]. بعدها روش WENO نیز برای شبکه بدون ساختار توسعه داده شده اند[19, 20] .روش WENO به همگرایی به سمت یک حالت پایا کمک می‌نماید که جزء مشکلات روش ENO بود.

روش‌های Discontinuous Galerkin (DG) [21]و روش‌های Spectral Method (SM) [22] نیز برای دستیابی به دقت‌های مرتبه بالا استفاده شده اند. بر خلاف روش حجم محدود، در روش‌های SM و DG ، هر سلول از چندین درجه از آزادی برخوردار هست. دستیابی به دقت مرتبه بالاتر در این روش‌ها نیازمند بازسازی متغییر‌های وابسته در داخل هر المان یا سلول است.

یکی از مواردی که در استفاده از شماتیک‌های با دقت بالاتر در روش‌های صریح (explicit) مشاهده شده است این موضوع است که در دقت‌های مرتبه بالاتر نسبت به مراتب پایین‌تر عددCFL مقدار کمتری را قبول می‌کند به خصوص در مسائلی که دارای لایه مرزی ویسکوز باشند که نیاز مند است شبکه در نواحی مرزی بسیار فشرده باشند . که این سبب پیشروی زمانی بسیار کند می‌گردد. به همین دلیل استفاده از روش‌های غیر صریح (implicit) در این مسائل توصیه می‌گردد.

تا امروز تلاش‌های بسیار برای توسعه روش‌هایی بهینه برای محاسبه گرادیان‌های با مرتبه بالا در شبکه های بدون ساختار صورت گرفته است. برای کاربردهای دینامیک سیالات محاسباتی روش‌های زیادی بر مبنای روش Least-Square توسعه یافته اند. اما این روش‌ها هر چقدر به سمت دقت بالاتر می‌روند از نظر عددی از خود سختی بیشتر نشان می‌دهند (حل سیستم ماتریس در آن‌ها سخت تر می شود یا به عبارت دیگر ماتریس stiff می‌گردد). از آنجایی که شبکه بندی بدون ساختار در بیشتر مسائل کاربردی اهمیت ویژه‌ای دارد اما در روش‌های بر مبنای Least Square نیاز است که برای دستیابی به دقت‌های بالاتر سلول‌های همسایه بیشتری (همسایه همسایه ها و یا حتی فراتر از آن ها) درگیر شوند و این کار را سخت تر می‌کند.

گسسته سازی با دقت مرتبه بالا (مرتبه دوم به بالا) در شبکه بندی‌های ساختار یافته سبب افزایش دقت و کاهش حجم محاسبات می‌شود [23, 24] . همچنین گسسته‌سازی های با دقت بالا در شبکه بندی بدون ساختار نیز در حال توسعه می‌باشند[15, 25, 26].اگرچه هنوز در حالت بدون ساختار در مسائل بزرگ و پیچیده از آن‌ها استفاده نمی‌شود. یکی از مسائل مهم این روش‌ها این است که چگونه از آن‌ها در ناپیوستگی‌هایی مانند شوک استفاده شود تا همچنان دقت و همگرایی در آن‌ها حفظ شود.

یکی از روش‌های کار با گسسته سازی‌های مرتبه بالا استفاده از محدود کننده‌ها (Limiter) می‌باشد. هدف از استفاده از محدود کننده‌ها حفظ جواب به صورت یکنواخت می‌باشد. زیرا در گسسته سازی‌های با دقت بالا ممکن است جواب با نوسانات شدید همراه باشد که منبع فیزیکی ندارند[27] .

از جمله محدود کننده‌ها می‌توان به روش ارا ئه شده توسط Barth و Jespersen اشاره نمود[28] . که پایه بسیاری از روش‌های دیگر شد. در این روش مقادیر خاصیت‌ها در مرحله بازسازی (Reconstruction) در معادلات اویلر محدود می‌گردند. هدف این محدود کننده‌گی آن است که ترم‌های بازسازی به نحوی کاهش یابند تا مقادیر خاصیت بر روی وجوه در محدوده ماکزیمم و مینمم مطلقی که مقادیر سلول‌ها مجاور می‌سازند، محدود شوند.

در واقع اگر خاصیت‌ها با استفاده از بسط تیلور توسعه داده شوند:

|  |  |
| --- | --- |
| (130) |  |

که  مقدار خاصیت مورد نظر در نقطه با مختصات  می‌باشد (توجه شود که k در واقع عضو مجموعه نقاطی است که بر روی وجوه سلول مورد نظر پراکنده شده‌اند و داری توزیع گوسی می‌باشند) و مقدار آن توسط مقدار  در نقطه  و توسط گرادیان های درجه اول، دوم و .... محاسبه می‌گردد. حال مبنای کار روش‌های محدود کننده آن است که مقادیر باز سازی از ماکزیمم و مینیمم اختلاف نسبی با همسایگان عبور نکند. به عبارت دیگر اگر اختلاف مقدار خاصیت در سلول i با همسایگان آن توسط  نمایش داده شود که  مقدار خاصیت در سلول همسایه است، بنابراین ماکزیمم و مینیمم مقدار این اختلاف، توسط  و نشان داده می‌شود. حال اگر قرار باشد خاصیت بر روی یکی از وجوه سلول iام مورد بررسی قرار بگیرد و اختلاف آن با خاصیت سلول i به شکل  نشان داده شود، بنابراین نباید این مقدار از مقادیر ماکزیمم و مینیمم تجاوز نماید:



در واقع می‌توان دریافت که :

|  |  |
| --- | --- |
| (131) |  |

پس یعنی ترم‌های بازسازی که ناشی از اعمال گرادیان‌های درجه اول، دوم و ... (با توجه به دقت مورد نظر) می‌باشند، باید در صورت نیاز محدود شوند. یعنی:

|  |  |
| --- | --- |
| (132) |  |

که  همان عبارت محدود کننده می‌باشد.

# گسسته‌سازی بخش زمانی معادلات

همانطور كه مشخص است با انتگرال‌گيري از معادلات حاکم بر روي حجم كنترل، انتگرال بخش هاي زماني و مكاني اين معادلات از هم مجزا شده و براي تمام سلول های محاسباتی، يك دستگاه معادلات ديفرانسيل معمولي به شكل زير بدست مي‌آيد:

|  |  |
| --- | --- |
| (133) |  |

که R(W)شامل مقادیر انتگرال‌گیری شده بخش‌های مکانی معادلات و W مقادیر بقایی می باشد. جهت بدست آوردن جواب معادله بالا باید این معادلات دیفرانسیل نسبت به زمان انتگرال‌گیری شود که در این گزارش به نحوه حل این معادلات پرداخته خواهد شد.

بطور کلی برای گسسته­سازی زمانی معادلات بالا روش­های زیر بکار گرفته می شود:

* صریح
* صریح-ضمنی
* ضمنی

که در ادامه هرکدام از این روش­ها توضیح داده می­شود.

## روش‌های صریح

در روش‌های صریح متغیرهای وابسته در زمان  را می­توان به صورت صریح از متغیرهای معلوم در زمان  بدست آورد. بنا نهادن و برنامه­ریزی کامپیوتری برای این روش نسبتاً ساده است. همچنین به راحتی می­توان از این روش­ها در پردازش موازی استفاده کرد و هزینه­ی محاسباتی آن در هر گام زمانی کم می­باشد. ولی به دلیل مشکل پایداری، گام زمانی باید بسیار کوچک در نظر گرفته شود. مخصوصاً زمانیکه سرعت تغییر زیادی کند یا اندازه شبکه متغیر باشد و این موضوع باعث زمان زیاد در محاسبات کامپیوتری می­گردد. در این گزارش روش های صریح زیر مورد بررسی قرار خواهد گرفت:

1. [روش اویلر](#_Toc436067537)
2. [روش رانگ کوتا](#_Toc436067538)
3. [روش رانگ کوتا اصلاح شده توسط جیمسون](#_Toc436067539)
4. [روش رانگ کوتا فلبرگ](#_Toc436067540)
5. [روش‌های چندگامی](#_Toc436067541)

### روش اویلر

یکی از اساسی­ترین روش­ها برای حل معادلات دیفرانسیل مقدار اولیه، توسط یکی از پرکارترین ریاضیدان­ها یعنی لئوناردو اویلر در سال­های 1783-1707 ارائه شد، او برای حل این معادلات از بسط تیلور استفاده کرد. در نتیجه ساده­ترین روش برای حل دستگاه معادلات حاکم روش اویلر می­باشد، که برای حل این معادلات فرض می­کنیم شرط اولیه به صورت  باشد. سپس فرض می­کنیم که جواب معادلات حاکم بفرم بقاییباشد،به این ترتیب طبق بسط تیلور در هر گام زمانی داریم:[29]

|  |  |
| --- | --- |
| (134) |  |

که در آن  عددی بین  می­باشد و هم­چنین و از طرفی داریم :

|  |  |
| --- | --- |
| (135) |  |

در نتیجه خواهیم داشت:

|  |  |
| --- | --- |
| (136) |  |

بر اساس روابط بالا جواب معادلات حاکم طبق روش اویلر به صورت زیر می­باشد:

|  |  |
| --- | --- |
| (137) |  |

همانطور که از فرم خطای رابطه­ی اویلر مشخص است این روش داری دقت مرتبه اول می­باشد که دارای دقت کمی است اما با توجه به سادگی آن، بسیار مورد توجه قرار گرفته است. اما باید توجه داشت که برای مسائلی که دقت بالا مورد نیاز است روش اویلر مناسب نمی­باشد. با توجه به فرم خطا، برای اینکه دقت روش اویلر قابل قبول باشد باید گام زمانی به شدت کوچک باشد.

چون در حل عددی هدف ما رسیدن به یک جواب با دقت مناسب و با کم­ترین تلاش است، برای مقایسه روش­های مختلف باید یک معیار مناسب ایجاد شود که این معیار خطای محلی[[31]](#footnote-31) می­باشد که دقت یک روش در یک گام زمانی خاص را با فرض اینکه در گام قبلی جواب دقیق بدست آمده ­است، نشان می­دهد. اگر  جواب دقیق مساله باشد خطای محلی در هر گام زمانی به شکل زیر تعریف می­شود:[29]

|  |  |
| --- | --- |
| (138) |  |

همانطور که قبلاً گفته شد خطای محلی برای روش اویلر به صورت زیر می­باشد:[29]

|  |  |
| --- | --- |
| (139) |  |

با توجه به خطای محلی روش اویلر دقت این روش کم می­باشد که برای رفع این مشکل می­توان از بسط تیلور با مرتبه­ی بالاتر استفاده کرد. طبق بسط تیلور مرتبه­ی m داریم:

|  |  |
| --- | --- |
| (140) |  |

از طرفی داریم :

در نتیجه معادله­ی اویلر مرتبه m به شکل زیر بدست می­آید:[29]

|  |  |
| --- | --- |
| (141) |  |

که در آن  به صورت زیر می­باشد:

|  |  |
| --- | --- |
| (142) |  |

در نتیجه طبق این رابطه جواب معادله با دقت مناسب بدست می­آید ولی برای استفاده از این روش باید در هر گام زمانی مشتق  نسبت به زمان محاسبه شود که فرایندی مشکل و زمانبر است در نتیجه این روش زیاد مورد توجه قرار نگرفته ­است و به ندرت از آن در CFD استفاده می­شود. برای رفع این مشکل کارل رانگ[[32]](#footnote-32) روشی شبیه تیلور مرتبه­ی بالا بدون نیاز به محاسبه­ی مشتق در سال 1895 ارائه کرد که بعد از آن مارتین کوتا[[33]](#footnote-33) این روش را گسترش داد تا برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل مقدار اولیه مناسب باشد و به همین دلیل این روش رانگ-کوتا نامیده می­شود.

### روش رانگ کوتا

ایده­ی روش رانگ کوتا بدست آوردن  است که  یک تقریب با مرتبه­ی دو برای  ایجاد کند تا با جایگذاری در معادله­ی اویلر مرتبه دو بتوان معادله دیفرانسیل را حل کرد. طبق بسط تیلور دو جمله­ای داریم:[29]

|  |  |
| --- | --- |
| (143) |  |

سپس با بسط دادن  داریم:

|  |  |
| --- | --- |
| (144) |  |

با مساوی قرار دادن روابط(143) و(144) مقادیر  به صورت زیر بدست می­آید:[29]

|  |  |
| --- | --- |
| (145) |  |

به این ترتیب رابطه­ی رانگ کوتا مرتبه دوم به شکل زیر بدست می­آید:

|  |  |
| --- | --- |
| (146) |  |

به عبارت دیگر در روش رانگ کوتا مرتبه دو، بازه زمانی  به دو قسمت تقسیم می­شود و در این دو قسمت روش اویلر استفاده می­شود تا جواب بدست آید. چون گام زمانی نصف شده است دقت جواب نیز از مرتبه دو می­گردد. به طریق مشابه می­توان روش رانگ کوتا با مرتبه بالاتر را نیز به وجود آورد. در حالت کلی روش رانگ کوتای صریح مرتبه  را می‌توان به شکل زیر نوشت: [30]

|  |  |
| --- | --- |
| (147) |  |

که در آن بالانویس  نشان دهنده‌ی مرحله زمانی و بالانویس نشان‌دهنده‌ی مرحله رانگ کوتا است. مقدار استاندارد ضرایب  تا  از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود: [31]

|  |  |
| --- | --- |
| (148) |  |

روش رانگ کوتا را به صورت ضمنی نیز می­توان نوشت ولی هزینه­ی محاسباتی بسیار بالایی دارد و به ندرت از آن استفاده می­شود. در نتیجه چون روش رانگ کوتا به صورت صریح نوشته می­شود کد نویسی آن ساده می­باشد. هم­چنین شرایط پایداری این روش نسبت به سایر روش­های صریح بهتر است.

### روش رانگ کوتا اصلاح شده توسط جیمسون

روش‌های چند مرحله‌ای رانگ کوتا علاوه بر افزایش دقت، ناحیه پایداری را نیز افزایش می‌دهند. این روش‌ها ناحیه پایداری را فقط در راستای محور حقیقی افزایش می‌دهند ولی تعیین گام زمانی طبق شرط  به دامنه ناحیه پایداری در هر دو محور حقیقی و مختلط بستگی دارد[30].بنابراین برای افزایش گام زمانی و همگرایی سریع‌تر باید دامنه‌ی پایداری در امتداد هر دو محور افزایش یابد. جیمسون با تغییر ضرایب روش رانگ کوتا دامنه پایداری را در جهت محور مختلط نیز گسترش داد[32]. جیمسون برای روش رانگ کوتا مرتبه 3 ضرایب را به شکل زیر بیان کرد[33]:

|  |  |
| --- | --- |
| (149) |  |

ضرایب روش رانگ کوتای مرتبه‌ی چهار نیز مانند زیر می‌باشد[32]:

|  |  |
| --- | --- |
| (150) |  |

با قرار دادن ضرایب روش رانگ کوتا به شکل بالا دامنه پایداری در امتداد محور مختلط نیز افزایش پیدا می‌کند و می‌توان گام زمانی را بزرگتر انتخاب کرد. اما چون دامنه پایداری در امتداد محور حقیقی خیلی بزرگ نیست نمی‌توان گام زمانی را خیلی بزرگتر از روش رانگ کوتای عادی انتخاب کرد. در صورتی که بخواهیم گام زمانی را به مقدار زیادی افزایش دهیم باید دامنه پایداری را در امتداد محور حقیقی هم گسترش دهیم. برای این کار جیمسون[32] در یک پخش مصنوعی به معادلات ناویر استوکس اضافه کرد که در این صورت این معادله به شکل زیر بدست می‌آید:

|  |  |
| --- | --- |
| (151) |  |

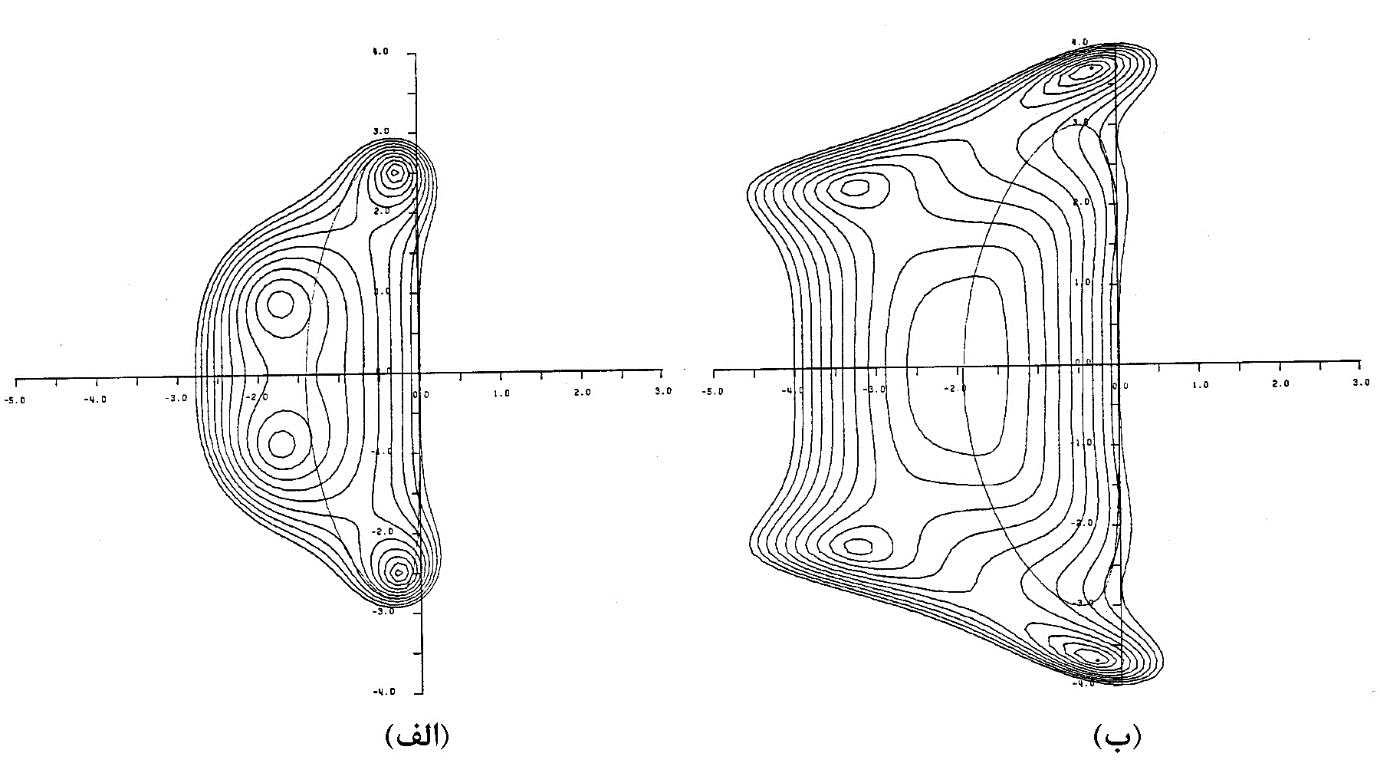
که در آن پخش مصنوعی می­باشد که  ضریب پخش و ثابت می­باشد. به این ترتیب در این حالت مقدار باقیمانده در مرحله  رانگ کوتا به شکل زیر می‌باشد[32]:

|  |  |
| --- | --- |
| (152) |  |

در این حالت جیمسون ضرایب زیر را برای روش رانگ کوتای مرتبه 4 پیشنهاد کرد[32]:

|  |  |
| --- | --- |
| (153) |  |

ناحیه پایداری برای روش رانگ کوتای معمولی و روش رانگ کوتای تصحیح شده جیمسون با استهلاک مصنوعی در ‏شکل (9) نشان داده شده است:



1. -دامنه پایداری (الف) روش رانگ کوتا (ب) روش جیمسون با استهلاک مصنوعی[32]

همانطور که در شکل بالا دیده می‌شود با بکار بردن روش تصحیح جیمسون روی روش رانگ کوتا و همچنین ایجاد استهلاک مصنوعی به شدت می‌توان دامنه پایداری را افزایش داد. اضافه کردن استهلاک مصنوعی جهت افزایش دامنه پایداری با توجه به حجم محاسبات آن به صرفه نیست. بنابراین در اینجا تصحیح جیمسون روی روش رانگ کوتا به تنهایی انجام می‌شود که در نتیجه شرایط پایداری مقدار کمی بهتر می‌شود و گام زمانی را می‌توان اندکی بزرگتر انتخاب کرد. چون تصحیح جیمسون فقط دامنه‌ی پایداری را در جهت محور عمودی افزایش می‌دهد اما در معادلات ناویر استوکس پایداری به هر دو محور افقی و عمودی بستگی دارد. با اضافه کردن استهلاک مصنوعی می‌توان دامنه‌ی پایداری را در جهت محور افقی نیز افزایش داد بنابراین در هر دو محور افقی و عمودی افزایش می‌یابد .[31]

### روش رانگ کوتا فلبرگ

در روش رانگ کوتا تخمین خطا کار مشکلی می­باشد. همچنین چون در هرگام زمانی محاسبات زیادی باید انجام شود، زمان انجام محاسبات در هر گام زمانی نسبت به روش اویلر زیاد می­باشد. در نتیجه در روش رانگ کوتا اگر گام زمانی به صورت هوشمندانه انتخاب شود در کاهش زمان محاسبات بسیار موثر است.

این کار با استفاده از کنترل خطای محلی انجام می­شود. برای ایجاد یک روش با گام زمانی هوشمندانه ابتدا دو روش متفاوت انتخاب می­کنیم، یک روش با مرتبه پایین و یک روش با مرتبه­ی بالاتر سپس با مقایسه خطای محلی آن­ها گام زمانی به­ گونه­ای انتخاب می­شود که خطا کوچکتر از مقدار مورد نظر شود[29] . ما برای شروع یک روش تیلور مرتبه m و یک روش تیلور مرتبه m+1 را استفاده می­کنیم در نتیجه طبق روش مرتبه m داریم:

|  |  |
| --- | --- |
| (154) |  |

و طبق روش مرتبه m+1 داریم:

|  |  |
| --- | --- |
| (155) |  |

سپس فرض می­کنیم که در زمان قبل جواب دقیق را داریم یعنی اگر جواب دقیق باشد داریم:

|  |  |
| --- | --- |
| (156) |  |

در نتیجه طبق تعریف خطای محلی داریم:

|  |  |
| --- | --- |
| (157) |  |

با توجه به اینکه  و  می­باشد در رابطه­ی بالا می­توان از  صرفنظر کرد. در نتیجه داریم:

|  |  |
| --- | --- |
| (158) |  |

با توجه به اینکه  از مرتبه m می­باشد می­توانیم بنویسیم  در واقع داریم:

|  |  |
| --- | --- |
| (159) |  |

اگر بخواهیم خطای محلی از مقدار مورد نظر  کمتر باشد باید:

|  |  |
| --- | --- |
| (160) |  |

به این ترتیب مساله­ی مورد نظر ابتدا با یک گام زمانی دلخواه با دو روش مرتبه­ m و مرتبه m+1 حل می­شود و با استفاده از این دو جواب و دقت مورد نظر مقدار q از رابطه­ی بالا بدست می­آید که:[29]

* اگر  گام زمانی فرض شده مناسب نیست و مساله با گام زمانی  که کوچکتر است حل می­گردد و سپس به زمان بعد می­رویم.
* اگر  گام زمانی فرض شده مناسب است و با همان گام زمانی به مرحله­ی بعد می­رویم.

همانطور که دیدیم با استفاده از کنترل خطای محلی می­توان گام زمانی را به صورت هوشمندانه انتخاب کرد.

روش رانگ کوتا- فلبرگ[[34]](#footnote-34) بر همین اساس به وجود آمده است. یکی از روش‌های پرکاربرد روش RKF4 است که در آن روش مرتبه پایین رانگ کوتا مرتبه سه و روش مرتبه بالا رانگ کوتا مرتبه چهار انتخاب می­شود. در نتیجه داریم :[29]

|  |  |
| --- | --- |
| (161) |  |

وکه در این روابط  جواب رانگ کوتای مرتبه 3 و  جواب رانگ کوتای مرتبه 4 در گام زمانی جدید است. به این ترتیب با فرض یک گام زمانی دلخواه و بدست آوردن جواب طبق دو روش بالا طبق رابطه‌ی زیر q بدست می‌آید:[29]

|  |  |
| --- | --- |
| (162) |  |

با استفاده از q بدست آمده همانطور که در بالا گفته شده گام زمانی مناسب محاسبه می­گردد و به زمان بعدی می­رویم و گام زمانی در مرحله­ی قبل را برای شروع در زمان جدید فرض می­کنیم و دوباره همین روند را تکرار می­کنیم. مزیت بزرگ روش رانگ-کوتا فلبرگ این است که از نظر محاسباتی مانند روش رانگ کوتا مرتبه چهار است ولی گام زمانی در آن به صورت هوشمند انتخاب می­گردد که باعث می­شود همگرایی سریعتری داشته باشد و زمان همگرایی آن بسیار مناسب باشد.

شرط پایداری برای روش رانگ کوتا مرتبه چهار اگر در مکان گسسته­سازی به صورت مرکزی باشد CFL برابر  می­باشد و برای گسسته­سازی بالادستی CFL برابر 3925/1 است. برای کارایی مناسب روش رانگ کوتا فلبرگ باید یک گام زمانی اولیه مناسب به هر سلول داده شود. برای انتخاب گام زمانی اولیه در روش RKF4 گام زمانی را در هر سلول محاسباتی با عدد کورانت بزرگتر از شرط پایداری محاسبه می‌کنیم و این گام زمانی را به عنوان فرض اولیه انتخاب می‌کنیم. به این ترتیب در هرسلول محاسباتی حداکثر گام زمانی ممکن انتخاب می‌شود یعنی گام زمانی بزرگتر از حالتی است که شرط CFL آن را کنترل می‌کند. این موضوع سبب می‌شود که روش رانگ کوتا فبلرگ همگرایی سریع‌تری نسبت به روش رانگ کوتا داشته باشد.

### روش‌های چندگامی

روش­هایی که در قسمت قبل بیان شد تک گام می باشند یعنی برای بدست آوردن جواب فقط از اطلاعات گام زمانی قبل استفاده می­شود در حالیکه روش­های چندگامی برای محاسبه­ی یک کمیت در زمان جدید از اطلاعات چند گام قبلی استفاده می­کنند. در روش­های چند گامی چون اطلاعات از چند گام زمانی قبل مورد استفاده قرار می­گیرد و خطای آن­ها به صورت انباشته در گام­های زمانی بعدی با هم جمع می­شود، باید حدس­های اولیه در چند گام زمانی ابتدایی با دقت مناسب انتخاب شود که برای این کار می­توان از روش­های رانگ کوتا با مرتبه­ی بالا استفاده کرد. یکی از پرکاربردترین روش­های چند گامی روش آدامز-بشفورث[[35]](#footnote-35) می­باشد که در اواخر قرن نوزدهم توسط آدامز که روی مسائل ریاضی کار می­کرد، ارائه شد و چون او از این روش برای حل معادلات حرکت سیال که توسط بشفورث ایجاد شده بود، استفاده کرد روش به این نام شناخته شد. برای مثال روش آدامز-بشفورث دو گامی به صورت زیر نوشته می­شود:[29]

|  |  |
| --- | --- |
| (163) |  |

برای این روش خطای محلی به صورت زیر تعریف می­گردد :[29]

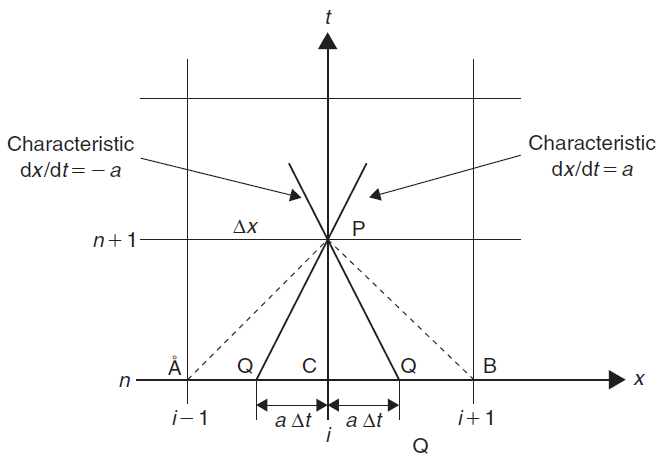
|  |  |
| --- | --- |
| (164) |  |

همانطور که از فرم خطای محلی مشخص است این روش از مرتبه­ی دو می­باشد که نسبت به روش رانگ کوتا مرتبه دو حجم محاسبات کمتری دارد ولی در عوض برای شروع در دو گام زمانی نیاز به شرط اولیه دارد. مشکل روش آدامز بشفورث این است که شرط CFL کوچکی دارد. برای مثال روش آدامز بشفورث دو گامی با گسسته­سازی مرکزی ناپایدار است و با گسسته­سازی بالا دستی عدد CFL بحرانی آن 5/0 می­باشد که نصف روش اویلر است به همین دلیل در این روش­ها نمی­توان گام زمانی را بزرگ انتخاب کرد.[34]

## پایداری، سازگاری و همگرایی

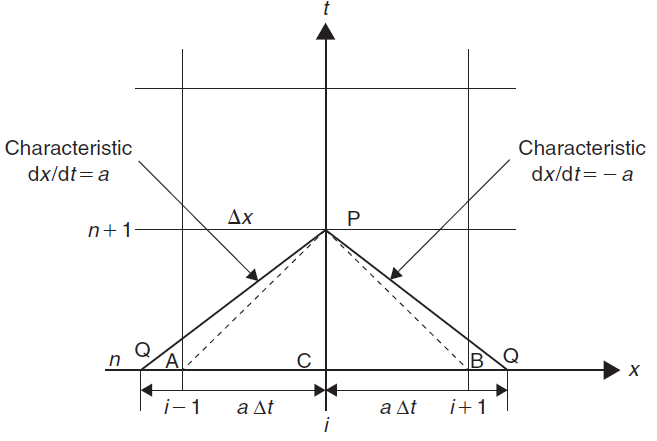
یک روش پایدار عددی روشی است که به خطاهایی که از هر منبعی منشا گرفته باشند اجازه­ی رشد در فرایند حل عددی از تکراری به تکرار دیگر یا از یک گام زمانی به گام زمانی دیگر را ندهد. بنابراین در صورت رشد خطا، روند حل ناپایدار خواهد بود و در صورتی که خطا رشد نکند و یا کاهش یابد، روند حل پایدار خواهد بود. عموماً مشکل پایداری در روش­های پیشرونده ظهور می­کند و نیاز است که محدودیت­های در انتخاب گام­ها اعمال گردد. بررسی پایداری امری بسیار مشکل می­باشد به خصوص در صورت حضور شرایط مرزی و عبارات غیر خطی. به همین منظور پایداری یک روش با استفاده از معادلات خطی با ضرایب ثابت و بدون شرایط مرزی مورد بررسی قرار می­گیرد. هم­چنین در بعضی موارد می­توان نتایج حاصله را در مورد مسائل پیچیده­تر به کار برد.[31]

بررسی پایداری روش­های صریح نشان می­دهد که برای اینکه یک روش پایدار باشد باید فضایی که توسط یک اغتشاش که با سرعت a در حرکت است، در بازه زمانی  پوشش داده می­شود کوچکتر از کوچکترین فاصله­ی بین دو نقطه شبکه باشد. به عبارت دیگر اگر یک روش عددی جواب مساله را در نقطه به صورت  ایجاد کند باید بتواند تمام اطلاعات فیزیکی که مساله را تحت تاثیر می­گذارد را درک کند. برای مثال اگر اغتشاش ایجاد شده در یک سیستم، مانند ‏شکل (10) ­باشد، چون این اغتشاش مانع درک کردن اطلاعات فیزیکی مساله از محیط اطراف نمی­شود، روش پایدار می­باشد .[31]



1. تعبیر هندسی حات پایدار

ولی اگر اغتشاش ایجاد شده در سیستم، مانند ‏شکل (11) ­باشد، چون این اغتشاش مانع درک اطلاعات فیزیکی مساله می­گردد، باعث ناپایدار شدن روش عددی می­شود.



1. تعبیر هندسی حالت ناپایدار [31]

همانطور که قبلاً گفته­ شد اولین کار برای حل معادلات حرکت سیال به روش عددی، جایگزین کردن مشتق­های پیوسته با تخمین­هایی در گره­های مجزا می­باشد که به مجموعه­ای از این گره­ها شبکه گفته می­شود. استفاده از این گره­ها باعث ایجاد خطاهایی در حل به واسطه­ی خطاهای قطع و همچنین خطاهای ایجاد شده در اعمال شرایط مرزی می­گردد. معادله­ی گسسته شده باید با به صفر رساندن فاصله­ی بین گره­ها تبدیل به معادله­ی دقیق یا پیوسته شود. درصورتی یک معادله را سازگار می­گویند که هرگاه ،  و به صفر میل کند عبارت خطای قطع نیز به صفر میل نماید.



در بعضی از روش­های گسسته­سازی خطاهای قطع توابعی از نسبت ،  و یا بعکس می­شوند. در این صورت سازگاری به صورت مشروط ارضا می­گردد. ،  و باید به صورتی کاهش یابند تا نسبت مناسب به صفر میل نماید. به طور مثال یک معادله­ی دیفرانسیل جزئی دارای خطایی با مرتبه­ی  می­باشد. چنانچه مشاهده می­شود هرگاه  و  به صفر میل نمایند عبارت  به سمت یک عدد معین و نه الزاما صفر میل می­کند. بنابراین این معادله سازگار نیست. در واقع برای اینکه یک روش سازگار باشد باید معادلات گسسته­شده، معادلات ریاضی را پوشش دهند. اختلاف بین معادلات ریاضی و معادلات گسسته شده خطای محلی می­باشد در نتیجه مطالعه­ی خطای محلی در بررسی سازگاری معادلات نقش مهمی ایفا می­کند . [31]

یک روش محاسبات عددی را همگرا می­نامند در صورتیکه حل معادله­ی گسسته شده با کاهش فاصله­ی گره­ها در شبکه به حل دقیق معادله­ی دیفرانسیل نزدیک شود. برای همگرایی یک مسئله­ی خطی مقدار اولیه که سازگار باشد، پایداری شرط لازم و کافی می­باشد. بررسی پایداری و همگرایی روش حل برای مسائل غیرخطی شدیداً وابسته به شرایط مرزی است و بررسی آن­ها مشکل می­باشد. برای چنین حالتی عموماً همگرایی توسط مطالعه­ی عدم وابستگی حل به شبکه[[36]](#footnote-36) صورت می­پذیرد. در این مطالعه محاسبات با ریزتر نمودن مداوم شبکه تکرار می­گردد، در صورتی که روش همگرا باشد حل مسئله به سوی یک حل مستقل از شبکه همگرا می­شود. در واقع نرخ همگرایی وابسته به مرتبه­ی خطاهای قطع در معادله­ی گسسته­شده می­باشد. از آنچه گفته ­شد بر می­آید که همگرایی یک روش، اختلاف جواب بدست آمده از مدل­سازی و حل دقیق معادلات را بیان می­کند به این ترتیب می­توان با مطالعه­ی همگرایی خطای حل را تخمین زد.

### تحلیل سازگاری

همانطور که در قسمت قبل گفته­ شد سازگاری بیان می­کند که وقتی  و  به صفر میل می­کند باید معادلات گسسته­شده به معادلات دیفرانسیل میل کند و چون اختلاف این دو معادله خطای محلی می­باشد، باید خطای محلی به صفر میل کند. در نتیجه برای بررسی سازگاری یک روش عددی به صورت زیر عمل می­کنیم :[31]

* مقدار  در روش عددی توسط بسط تیلور حول  نوشته می­شود. در این حالت تمام مشتق­های مرتبه­ی بالا نگه داشته می­شوند.
* مقادیر بدست آمده از بسط تیلور در مرحله­ی قبل را در معادله دیفرانسیل گسسته­شده جایگزین می کنیم و مقدار خطای محلی  را بدست می­آوریم.
* خطای محلی دارای فرم  می­باشد که روش درصورتی پایدار است که با کوچک­ کردن  و  خطای محلی به صفر میل کند.

برای روشن شدن این روش معادله­ی زیر را در نظر بگیرید:

|  |  |
| --- | --- |
| (165) |  |

که این معادله به صورت زیر گسسته می­شود:

|  |  |
| --- | --- |
| (166) |  |

طبق بسط تیلور داریم:





مقادیر حاصله از بسط تیلور را در معادله­ی (166)جایگزین می­کنیم.



به این ترتیب خطای محلی به صورت زیر بدست می­آید.

|  |  |
| --- | --- |
| (167) |  |

همانطور که از فرم خطای محلی مشخص می­باشد، با کوچک­ کردن  و  خطای محلی به صفر میل می­کند در نتیجه این روش سازگار می­باشد. به همین ترتیب سازگاری روش­های دیگر مورد بررسی قرار می­گیرد.

### تحلیل پایداری فون نیومن

در بسیاری از موارد می­توان با استفاده از تحلیل پایداری، شرط پایداری را بدست آورد. دو روش عمده برای تحلیل پایداری وجود دارد، این دو روش عبارتند از تحلیل پایداری توسط ایجاد اختلال و تحلیل پایداری فون نیومن[[37]](#footnote-37) (فوریه). در روش اول اختلالی در یک نقطه مجزا اعمال می­گردد و اثرات آن در نقاط همجوار مورد مطالعه قرار می گیرد. این روش بسیار وقت­گیر و زمان­بر است. در اینجا به روش فون نیومن که بیشتر از روش اول عمومیت دارد اشاره می­کنیم.

همانطور که گفته شد برای مطالعه­ی پایداری یک روش از یک معادله­ی خطی استفاده می­شود در نتیجه برای بررسی پایداری روش اویلر معادله­ی عمومی زیر را بررسی می­کنیم :[34]

|  |  |
| --- | --- |
| (168) |  |

و سپس با استفاده از معادله اویلر و تفاوت مرکزی معادله را به شکل زیر گسسته­سازی می­کنیم:

|  |  |
| --- | --- |
| (169) |  |

حل عددی این معادله توسط دو منبع خطا تحت تاثیر قرار می­گیرد:

1.خطای گسسته­سازی

2. خطای رند کردن

حال فرض کنیم اختلاف حل عددی توسط کامپیوتر و حل دقیق  باشد. می­دانیم که خطای  نیز در معادله صدق می­کند. حال اگر  در یکی از مراحل حل پدیدار گردد، می­توان گفت که حل به شرطی پایدار است که ها در طی فرایند حل از n به n+1 کوچک شوند و یا حداقل رشد نکنند. درصورتی­که ها رشد نمایند، حل ناپایدار خواهد بود. در واقع برای اینکه حل پایدار شود باید[34] :



حال فرض کنیم توزیع خطا در راستای محور x توسط سری فوریه و تغییرات در راستای زمان به صورت توانی از t داده شده باشد[34]:

|  |  |
| --- | --- |
| (170) |  |

با توجه به اینکه معادله­ی (169)خطی می­باشد با جایگزین نمودن سری بالا در معادله رفتار هر بخش مانند خود سری خواهد بود. بنابراین جهت سهولت در کار فقط یک بخش را درنظر می­گیریم[34] :

|  |  |
| --- | --- |
| (171) |  |

با جایگذاری خطا در معادله­ی(171)داریم:

|  |  |
| --- | --- |
| (172) |  |

با تقسیم طرفین معادله­ی بالا به  داریم:

|  |  |
| --- | --- |
| (173) |  |

همانطور که می­دانیم :

 و 

بنابراین رابطه­ی (173)را می­توان به صورت زیر نوشت:

|  |  |
| --- | --- |
| (174) |  |

حال برای بررسی پایداری نسبت خطا در یک گام زمانی را بدست می­آوریم:

|  |  |
| --- | --- |
| (175) |  |

اکنون با ترکیب معادلات (174)و (175) خواهیم داشت:

|  |  |
| --- | --- |
| (176) |  |

در نتیجه رابطه­ی اویلر با گسسته­سازی مرکزی همیشه ناپایدار می­باشد که برای پایدار کردن آن می­توان در رابطه­ی (169)  را با  جایگزین کرد.

به طریق مشابه با استفاده از تحلیل فون نیومن می­توان پایداری روش­های مختلف را مورد بررسی قرار داد. از آنجا که بررسی پایداری معادلات غیرخطی به صورت تحلیلی غیر ممکن است و پایداری این معادلات به شدت به شرایط مرزی وابسته هستند برای بررسی پایداری معادلات ناویر استوکس یک معادله­ی مدل ایجاد می­شود که مباحث پایداری روی آن بررسی می­گردد و نتایج آن به معادلات ناویر استوکس تعمیم داده می­شود. در مراجع معادله­ی مدل برای رابطه­ی ناویر استوکس بدون لزجت رابطه­ی (168) معرفی شده­است. حال اگر رابطه­ی (168)را به صورت بالا دستی گسسته­سازی کنیم، داریم:

|  |  |
| --- | --- |
| (177) |  |

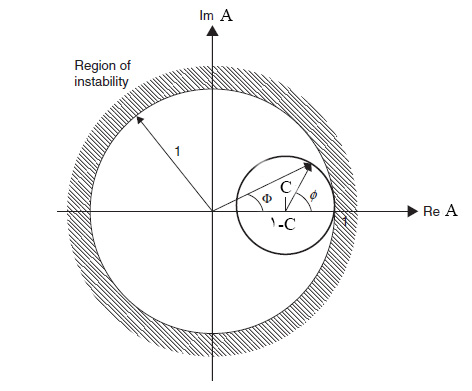
با جایگذاری خطا در آن و تقسیم آن بر  ضریب رشد[[38]](#footnote-38) به صورت زیر بدست می­آید:

|  |  |
| --- | --- |
| (178) |  |

در نتیجه شرط پایداری برای روش اویلر با گسسته­سازی بالا دستی به صورت زیر بدست می­آید:



برای پایداری باید  باشد که  عدد کورانت می­باشد. محدوده­ی پایداری برای این روش در ‏شکل (12) نشان داده شده است. در این شکل  در دستگاه اعداد مختلط ترسیم شده است که یک دایره با شعاع عدد کورانت و مرکز  می­باشد و با توجه به آن اگر عدد کورانت بزرگتر از یک شود از محدوده­ی پایداری خارج می­شویم و روش ناپایدار می­شود [31]



1. ناحیه پایداری در روش اویلر با گسسته­سازی بالا دستی [31]

اگر رابطه­ی (168) را به صورت مرکزی گسسته­سازی کنیم داریم:



حال اگر  را با  جایگزین کنیم می­توان نوشت:[35]



اگر تحلیل فون نیومن را در رابطه­ی بالا اعمال کنیم مانند قبل شرط CFL کوچکتر از یک بدست می­آید.در معادلات غیرخطی در صورتی که بخش جابه­جایی به صورت مرکزی گسسته­شود و عدد کورانت کوچکتر از یک باشد باز ممکن است در حل نوساناتی ایجاد گردد و کاهش عدد کورانت باعث نامناسب­تر شدن جواب می­گردد.

استفاده از روش رانگ کوتا باعث بهبود شرایط پایداری می­شود. برای بررسی این موضوع معادله­ی مدل را در نظر بگیرید که اگر این رابطه را در مکان به صورت مرکزی گسسته کنیم داریم:

|  |  |
| --- | --- |
| (179) |  |

حال اگر در رابطه­ی بالا طبق تحلیل فون نیومن خطا را به صورت  قرار دهیم و فقط یک بخش از سری را در آن قرار دهیم رابطه­ی(179) به شکل زیر بدست می­آید :[35]

|  |  |
| --- | --- |
| (180) |  |

که در رابطه­ی بالا  عدد کورانت و  عدد موثر موج می­باشد. طبق قضایای ریاضی می­توان نشان داد که در روش­های رانگ کوتا ضریب رشد یا همان  به شکل زیر می­باشد[35] :

|  |  |
| --- | --- |
| (181) |  |

در نتیجه در روش رانگ کوتا مرتبه اول یا همان روش اویلر با گسسته­سازی مرکزی ضریب رشد به صورت زیر بدست می­آید[35] :



که چون همیشه بزرگتر از یک می­باشد این روش در همه­ی حالت­ها ناپایدار است که در قسمت قبل نیز به همین نتیجه رسیدیم. همانند قبل اگر  را با  جایگزین کنیم روش پایدار می­گردد و شرط پایداری عدد کورانت کوچکتر از یک می­باشد. در روش رانگ کوتا مرتبه دو نیز ضریب رشد با توجه به رابطه­ی (181) به صورت زیر بدست می­آید:



در نتیجه روش رانگ کوتا مرتبه دو با گسسته سازی مرکزی نیز ناپایدار می­باشد. با اعمال شرط قبل این روش پایدار می­باشد. برای روش رانگ کوتا مرتبه­چهار نیز ضریب رشد به صورت زیر بدست می­آید:





برای پایداری این روش باید  باشد که شرط پایداری برای روش رانگ کوتا مرتبه چهار بدست می­آید.



شرط CFL برای این روش عدد کورانت کوچکتر از  می­باشد که حدوداً سه برابر روش اویلر می­باشد.

حال اگر در مکان معادله را به صورت بالا دستی گسسته سازی کنیم رابطه­ی (168)به صورت زیر بدست می­آید:

|  |  |
| --- | --- |
| (182) |  |

در نتیجه با جایگذاری بخش خطا در آن رابطه به صورت زیر بدست می­آید:

|  |  |
| --- | --- |
| (183) |  |

در این حالت  می­باشد. با جایگذاری در رابطه­ی(181) ضریب رشد برای روش رانگ کوتا مرتبه اول یا روش اویلر به صورت زیر بدست می­آید[35] :

همانطور که قبلا نیز بدست آوریم شرط CFL برای پایداری روش رانگ کوتا مرتبه اول (اویلر) با گسسته­سازی بالا دستی این است که عدد کورانت کوچکتر از یک باشد. به طریق مشابه می­توان شرط پایداری برای روش­های رانگ کوتا با مرتبه­ی بالاتر و گسسته­سازی بالا دستی را بدست آورد. به طور خلاصه شرایط پایداری برای روش­های رانگ کوتا در ‏جدول (1) آورده شده است.

1. : شرط پایداری برای روش­های رانگ کوتا

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| مرکزی | بالا دستی | روش |
|  |  | RK1  RK2  RK3  RK4 |

بررسی سازگاری معادلات نیز برای روش­های غیرخطی امکان­پذیر نمی­باشد. در نتیجه مانند پایداری برای بررسی سازگاری معادلات ناویر استوکس غیرلزج از معادله­ی مدل (168) استفاده می­شود.

همانطور که در قسمت قبل دیدیم معادله­ی مدل با روش اویلر سازگار بود در نتیجه معادلات ناویر استوکس بدون لزجت نیز طبق روش اویلر سازگار می­باشد. برای بررسی همگرایی این روش نیز از روش استقلال حل از شبکه استفاده می­شود. در نتیجه با در نظر گرفتن شرایط پایداری به راحتی می­توان از روش اویلر برای حل معادلات غیر لزج استفاده کرد.

برای بررسی سازگاری روش رانگ کوتا نیز باید خطای محلی را برای این روش بدست آوریم. با قرار دادن بسط تیلور در روش رانگ کوتا مرتبه دو خطای محلی به صورت زیر بدست می­آید:



همانطور که از فرم خطای محلی مشخص است روش رانگ کوتا مرتبه دو نیز برای حل معادله­ی ناویر استوکس غیرلزج سازگار می­باشد چون با میل دادن و  به صفر، خطای محلی نیز به صفر میل می­کند.

## **عدد کورانت و تعیین گام زمانی**

عدد کورانت نشان می­دهد که در یک گام زمانی چقدر از اطلاعات بصورت عرضی از سلول عبور می­کند در نتیجه طبق تعریف در روش اویلر صریح عدد کورانت نباید بیشتر از یک باشد چون در یک گام زمانی اطلاعات بیشتر از یک سلول را می­پیماید و جواب به درستی بدست نمی­آید. شرط CFL نیز بزرگترین عدد کورانت ممکن برای روش عددی موجود می­باشد که در سال 1928 توسط کورانت، فردریش و لوئی معرفی شد. طبق تعریف و با توجه به معادلات ناویر استوکس عدد کورانت برای حالت یک بعدی به صورت زیر تعریف می­شود [36]:



اگر حالت دو بعدی را در نظر بگیریم چون در یک گام زمانی اطلاعات در جهت x و y گسترش می­یابد و با توجه به معادله­ی ناویر استوکس دو بعدی عدد کورانت به صورت زیر تعریف می­گردد[36] :



در حالت کلی عدد کورانت برای جریان چند بعدی به صورت زیر تعریف می­شود[36]:

 ­

در جریان مغشوش سرعت را می‌توان با استفاده از مقادیر متوسط رینولدز به شکل زیر نوشت :[37]

|  |  |
| --- | --- |
| (184) |  |

سپس معادلات ناویر استوکس به شکل متوسط گیری شده نوشته می‌شود. به این ترتیب با استفاده از مقدار سرعت به شکل بالا می‌توان عدد کورانت را برای جریان مغشوش محاسبه کرد. به طریق مشابه مولفه‌های مختلف سرعت در جریان مغشوش چند بعدی نیز تعریف می­شوند و با استفاده از آن عدد کورانت در جریان مغشوش چند بعدی محاسبه می‌شود.

همانطور که از رابطه­ی عدد کورانت مشخص می­باشد چون این عدد وابسته به سرعت محلی است عدد کورانت وابسته به فیزیک مسئله می­باشد. برای مثال در گسسته­سازی مرکزی ناحیه فیزیکی و ناحیه عددی برای گره­های مختلف در زمان به شکل زیر می‌باشد:



1. پایداری در روش­های مرکزی

همانطور که در ‏شکل (13) مشخص می­باشد عدد کورانت باید به گونه­ای انتخاب شود که در هیچ گره­ای شرط CFL نقض نشود و چون در هر گره عدد کورانت وابسته به سرعت متوسط در آن گره می­باشد بنابراین در هر روش، گام زمانی و عدد کورانت باید با توجه به فیزیک مسئله انتخاب شود که در همه­ی گره­ها پایداری داشته ­باشیم.

با توجه به مباحث انجام گرفته یکی از مهم­ترین مراحل حل عددی معادلات ناویر استوکس به روش صریح انتخاب، گام زمانی مناسب می­باشد. برای انتخاب گام زمانی باید دقت مورد نیاز و هزینه­ی محاسباتی را در نظر بگیریم چون هرچه گام زمانی کوچکتر باشد جواب دقیق­تر و پایدارتر می­باشد ولی در عوض زمان و هزینه­ی محاسبات به شدت بالا می­رود. بنابراین گام زمانی باید به­گونه­ای انتخاب شود که تعادل مناسبی را بین این دو مورد اعمال کند. برای انتخاب گام زمانی مناسب از عدد کورانت و شرط CFL استفاده می­شود. انتخاب گام زمانی به دو شکل می­باشد:

1.گام زمانی ثابت

در این حالت بزرگترین سرعت موجود در سیستم برای انتخاب گام زمانی استفاده می­شود. برای مثال جریان روی یک حفره باز به طول 76 میلیمتر را در نظر بگیرید که آن را به 100 قسمت تقسیم می­کنیم، اگر سرعت جریان آزاد  باشد برای انتخاب گام زمانی مناسب با روش اویلر بیشترین عدد کورانت یعنی 1 را در نظر می­گیریم. در نتیجه چون بیشترین سرعت ممکن برای این حالت سرعت جریان آزاد می­باشد گام زمانی به صورت زیر بدست می­آید:



با استفاده از این روش کوچکترین گام زمانی مورد نیاز در کل حل برای تمام مراحل انتخاب می­گردد. در صورتی که ممکن است در بعضی از مراحل با گام زمانی بزرگتر نیز حل پایدار ­باشد. برای رفع این مشکل می­توان از گام زمانی متغیر استفاده کرد.

2.گام زمانی متغیر

در این حالت در هر زمان برای محاسبه­ی گام زمانی، بزرگترین سرعت موجود در شبکه محاسبه می­شود و براساس این سرعت، گام زمانی برای مرحله­ی بعدی انتخاب می­شود یعنی گام زمانی به صورت زیر بدست می­آید:

در نتیجه طبق این روش در هر زمان می­توان گام زمانی مناسب را انتخاب کرد. حتی می­توان برای هر گره یک گام زمانی متفاوت انتخاب کرد که در این حالت در هر گره گام زمانی به صورت زیر بدست:



به این ترتیب با اعمال گام زمانی متغیر علاوه بر بدست آمدن پایداری و دقت مناسب هزینه و زمان عملیات محاسباتی نیز کاهش می­یابد چون در هر گره گام مناسب انتخاب شده است.

### گام ‌زمانی موضعی و افزایش سرعت همگرایی

برای بدست آوردن حل جریان‌های دائم با استفاده از الگوریتم‌های صریح می‌توان از گام زمانی موضعی استفاده کرد که سرعت همگرایی را به شدت افزایش می‌دهد ولی برای شبیه‌سازی غیر دائم استفاده از آن امکان‌پذیر نمی‌باشد. در این روش همانطور که در بالا گفته شد گام زمانی در هر سلول محاسباتی براساس شرط پایداری محلی محاسبه می‌شود و گام زمانی در هر سلول متفاوت است. با توجه به اینکه برای محاسبه گام زمانی هر سلول از اندازه‌ی آن استفاده می‌شود و اندازه‌ی سلول‌ها در دامنه حل متفاوت است، هریک از سلول‌ها با گام‌های متفاوتی به سمت حالت دائم پیش‌ می‌روند. یعنی سلول‌های بزرگتر که از سطح بیشتری برخوردار هستند دیرتر به حالت پایا می‌رسند که این سلول‌ها در گام زمانی موضعی دارای گام زمانی بزرگتری هستند و در نتیجه میدان حل سریعتر به حالت دائم همگرا می‌شود. اما استفاده از گام زمانی موضعی مقداری دقت زمانی کاهش می‌یابد[38].چون هر سلول یک گام زمانی متفاوت دارد در صورتی که در محاسبه‌ی شارها از مقادیر موجود در دو سلول همسایه که در زمان‌های مختلف می‌باشند استفاده می‌شود. اما از آنجا که سلول‌های همسایه اندازه‌های نزدیک به هم دارند گام زمانی آن‌ها تفاوت زیادی ندارد و در ابتدا که تغییرات زیاد است زمان سلول‌ها نزدیک به هم است. با پیشروی فرایند حل زمان سلول‌ها تفاوت بیشتری پیدا می‌کند اما در این زمان‌ها به جواب پایا نزدیک می‌شویم که تغییرات در سلول‌ها نسبت به زمان‌های قبل کم است یعنی در این اختلاف زمانی چون به حل پایا نزدیک هستیم خطای زیادی ایجاد نمی‌شود. تاثیر گام زمانی موضعی بر سرعت همگرایی و دقت محاسبات در قسمت نتایج بررسی شده است همانطور که در این قسمت مشاهده می‌شود خطای ایجاد شده به دلیل استفاده از گام زمانی موضعی چشمگیر نیست.

برای بررسی دقیق‌تر تعیین گام زمانی به شکل موضعی، معادله‌ی ناویر استوکس را برای یک محیط دو بعدی در حالت کلی به شکل زیر در نظر می‌گیریم[39] :

|  |  |
| --- | --- |
| (185) |  |

که در آن



به این ترتیب کل معادله به دو قسمت بخش‌های جابه‌جایی  و بخش‌های پخش ناشی از ویسکوزیته  تقسیم می‌شود. محدودیت پایداری باید برای هر دو قسمت جابه‌جایی و پخش معادله‌ی ناویر استوکس اعمال شود. به این ترتیب دو محدودیت  و  به عنوان محدودیت گام زمانی جابه‌جایی و محدودیت گام زمانی ویسکوز به شکل زیر ایجاد می‌گردد [38] :

|  |  |
| --- | --- |
| (186) |  |

|  |  |
| --- | --- |
| (187) |  |

که در آن  بزرگترین مقدار ویژه‌ی معادله‌ی ناویر استوکس غیر ویسکوز میانگین گرفته در اطراف مرز حجم کنترل،  بزرگترین مقدار ویژه‌ی قسمت پخشی معادله‌ی ناویر استوکس است که در اطراف مرز حجم کنترل میانگین‌گیری می‌شود،  ضریبی‌ است که اهمیت محدودیت گام زمانی ویسکوز را نسبت به محدودیت گام زمانی غیر ویسکوز نشان می‌دهد که معمولاً حدود 25/0 انتخاب می‌شود و  مساحت حجم کنترل می‌باشد. در نتیجه گام زمانی نهایی به شکل زیر بدست می‌آید[38] :

|  |  |
| --- | --- |
| (188) |  |

برای تعیین گام زمانی معادله‌ی را در یک دستگاه مختصات عمومی  می‌نویسیم [39]:

|  |  |
| --- | --- |
| (189) |  |

که در آن علامت *Hat* درمعادلات بالا نشان‌دهنده‌ی متغیرها در دستگاه مختصات جدید می‌باشد. در واقع متغیرها براساس تغییر مختصات از دستگاه کارتزین  به  ایجاد شده‌اند که این تغییر دستگاه به شکل زیر می‌باشد:

|  |  |
| --- | --- |
| (190) |  |

که در آن  ژاکوبین می‌باشد و وارون آن به شکل زیر محاسبه می‌شود:

|  |  |
| --- | --- |
| (191) |  |

در نتیجه متغیرهای جدید به شکل زیر بدست می‌آیند[39]:

|  |  |
| --- | --- |
| (192) |  |

در روابط بالا ماتریس  به شکل زیر بدست می‌آید[39]:

|  |  |
| --- | --- |
| (193) |  |

که در آن





در روابط بالا اپراتور گرادیان و  دلتای کرونیکر می‌باشد. با جایگذاری متغیرها در معادله‌ی(174)، معادله‌ی ناویر استوکس به شکل زیر بدست می‌آید [39]:

|  |  |
| --- | --- |
| (194) |  |

که در آن







به این ترتیب اگر c سرعت صوت باشد، مقادیر ویژه‌ی ماتریس  به صورت زیر بدست می‌آید:[39]

|  |  |
| --- | --- |
| (195) |  |

همچنین مقادیر ویژه‌ی ماتریس  هم عبارتند از :[39]

|  |  |
| --- | --- |
| (196) |  |



همچنین از مقادیر ویژه‌ی ماتریس  صرفنظر می‌شود. در نتیجه بزرگترین مقدار ویژه‌ی قسمت غیرویسکوز معادله‌ی ناویر استوکس به کمک مقادیر ویژه‌ی ماتریس‌های  و  به شکل زیر بدست می‌آید::

|  |  |
| --- | --- |
| (197) |  |

سپس با صرفنظر کردن از  بزرگترین مقدار ویژه‌ی قسمت ویسکوز معادله‌ی ناویر استوکس به کمک مقادیر ویژه‌ی ماتریس‌های و به شکل زیر بدست می‌آید :[38]

|  |  |
| --- | --- |
| (198) |  |
| (199) |  |

به این ترتیب مقدار  به فرم زیر بدست می‌آید:[38]

|  |  |
| --- | --- |
| (200) |  |

که در آن  است. با مشخص شدن  و  محدویت گام زمانی  و  بدست می‌آیند و در نهایت گام زمانی  با در نظر گرفتن عدد کورانت دلخواه طبق رابطه‌ی (189) محاسبه می‌شود.

## روش‌های صریح-ضمنی

روش­های صریح-ضمنی به طور گسترده­ای در زمینه­ی علوم مهندسی مورد استفاده قرار می­گیرند. این روش­ها معمولاً در سیستم­هایی مورد استفاده قرار می­گیرند که دو فیزیک مختلف به طور همزمان در سیستم وجود دارد. در واقع در سیستم­هایی مثل ترکیب دینامیک نوترون­ها، سیستم­های شامل پدیده­ی پخش و جابه­جایی به طور همزمان و مسائل شامل پدیده­ی پخش و تشعشع حرارتی از این روش­ها استفاده می­شود. یکی دیگر از کاربردهای روش­های صریح-ضمنی در معادلات ناویر استوکس دو فازی می­باشد که یک دسته معادلات مربوط به حرکت سیال و یک دسته معادلات برای تعادل ترمودینامیکی بین فازها موجود می­باشد. ساده­ترین روش برای حل این معادلات روش اویلر می­باشد که از مرتبه اول است. معمولاً معادلات چنین سیستم­هایی شامل یک بخش سفت[[39]](#footnote-39) و یک بخش غیر سفت می­باشند. یعنی دارای یک بخش خیلی بزرگ و یک بخش کوچک می­باشند. حل عددی چنین معادلاتی بسیار مشکل می­باشد به همین دلیل برای هر مسئله روش­های مختلفی ایجاد شده­است. روش­های صریح-ضمنی برای حل این مشکل قسمت سفت و غیر سفت معادله را از یکدیگر ایزوله می­کنند و از یک روش گسسته­سازی صریح برای حل قسمت غیرسفت و یک روش گسسته­سازی ضمنی برای حل قسمت سفت معادله استفاده می­کنند. این دسته معادلات را در حالت کلی می­توان به صورت زیر بیان کرد:[40]



که در آن  و  به ترتیب بیانگر بخش غیر سفت و بخش سفت می­باشند.

یکی دیگر از کاربردهای روش‌های صریح-ضمنی استفاده از این روش‌ها به شکل پیش‌بینی و تصحیح می‌باشد[31]روش­های صریح علاوه بر اینکه دارای مشکل پایداری هستند و در آن­ها گام زمانی باید بسیار کوچک انتخاب شود، دقت بالایی هم ندارند. در روش­های ضمنی مشکل پایداری وجود ندارد و دقت آن‌ها از رو‌ش‌های صریح بیشتر است، ولی در آنها باید یک دستگاه معادلات خطی به طور همزمان حل گردد که در صورت پیچیده بودن هندسه مساله، کار زمان­بری می­باشد. روش­های صریح- ضمنی مشکلات روش­های ضمنی را کاهش می­دهند ولی دقتی مشابه روش‌های ضمنی دارند. در نتیجه در مواردی که به دلیل پیچیدگی هندسی، استفاده از روش­های ضمنی سخت و پیچیده است باید از ترکیب روش­های صریح و ضمنی به شکل پیش‌بینی تصحیح استفاده کرد. در این حالت ابتدا با استفاده از روش­های صریح یک حل تقریبی برای مسئله بدست می­آید و سپس به کمک یک روش ضمنی این حل تقریبی تصحیح می­گردد. در ادامه نحوه‌ی اعمال روش­های صریح-ضمنی برای معادلات ناویر استوکس غیرلزج بیان می­شود و سپس سازگاری و پایداری آن­ها مطالعه می­گردد.

### پدیده‌ی پراکندگی در محاسبات و استهلاک مصنوعی

گسسته­سازی بخش مکانی معادله­ی ناویر استوکس به صورت بالا دستی دارای دقت مرتبه اول می­باشد، هم­چنین عملکرد پخشی این روش زیاد است و در صورتی که برای گسسته­سازی زمانی از روش­های مرتبه بالا استفاده شود و در مکان به صورت بالا دستی گسسته­سازی کنیم، دقت روش مورد استفاده کاهش می­یابد در نتیجه برای گسسته­سازی مکانی باید از روش­های با دقت بالاتر، مانند روش مرکزی استفاده شود. برای مثال رابطه­ی زیر را در نظر بگیرید:

|  |  |
| --- | --- |
| (201) |  |

حال اگر با استفاده از بسط تیلور،  و  را حول  بسط دهیم داریم:





اگر این دو رابطه را از هم کم کنیم خواهیم داشت:

|  |  |
| --- | --- |
| (202) |  |

مسئله­ی مورد نظر یک مسئله­ی جابه­جایی محض بود ولی در معادله­ی حاصله که توسط روش تفاضل مرکزی حل می­شود، عبارت مشتق سوم در سمت راست ظهور می­کند که این عبارت مسئول ایجاد پدیده­ی پراکندگی است. به عبارتی توزیع  یک شکل نوسانی به خود می­گیرد و از جواب دقیق مساله دور می­شویم.

یک راه حل برای کاهش نوسانات در حل، اضافه کردن یک پخش مصنوعی به مسئله می­باشد. برای اینکار می­توان معادله­ی ناویر استوکس را به صورت زیر در نظر گرفت:

|  |  |
| --- | --- |
| (203) |  |

که در آن  پخش مصنوعی می­باشد و به صورت زیر بدست می­آید :[34]

|  |  |
| --- | --- |
| (204) |  |

که در آن می­توان یک پخش مصنوعی به صورت  که  ضریب پخش و ثابت می­باشد تعریف کرد، در این صورت  می­باشد.

### روش اویلر صریح-ضمنی

با اعمال ویسکوزیته مصنوعی به معادلات ناویر استوکس غیرلزج معادلات به شکل پخش-جابه­جایی تبدیل می­شوند. این معادله را می­توان به شکل زیر نوشت:

|  |  |
| --- | --- |
| (205) |  |

در رابطه­ی بالا  به شکل جابه­جایی می­باشد و بخش پخشی است. در نتیجه دو فیزیک مختلف در سیستم به وجود می­آید و می­توان از روش­های صریح-ضمنی برای حل این معادله استفاده کرد. روش اویلر صریح-ضمنی از دو قسمت زیر ایجاد می­شود[40] :

1.حل صریح



2.حل ضمنی



به این ترتیب مسئله به دو قسمت ایزوله تبدیل می­شود و با ترکیب این دو قسمت جواب مسئله بدست می­آید. مزیت این ایزوله کردن این است که این روش بدون مشکلاتی که در همگرایی عددی روش­های ضمنی و صریح وجود دارد جواب مسئله را بدست می­آورد[40] . اما گسسته­سازی زمانی طبق روش اویلر از مرتبه اول می­باشد و دارای خطای زیادی است. برای افزایش دقت می­توان از روش­های رانگ کوتا استفاده کرد ولی روش رانگ کوتای ضمنی دارای هزینه­ی محاسباتی بالایی می­باشد. این روش در ادامه توضیح داده می­شود.

### روش رانگ کوتا صریح-ضمنی

یک راه برای افزایش دقت روش صریح-ضمنی استفاده از روش­های رانگ کوتا می­باشد. روش رانگ کوتای مرتبه 2 صریح-ضمنی برای معادله­ی ناویر استوکس به صورت زیر نوشته می­شود :[40]

1.حل صریح



2.حل ضمنی



استفاده از روش رانگ کوتا به صورت ضمنی زمان محاسبات را به شدت بالا می­برد. به همین دلیل در حل ضمنی به جای استفاده از روش رانگ کوتا از روش کرانک نیکلسون استفاده می­شود در نتیجه حل ضمنی به صورت زیر بدست می­آید :[40]

|  |  |
| --- | --- |
| (206) |  |

به این ترتیب برای حل صریح از روش رانگ کوتا TVD و برای حل ضمنی روش کرانک نیکلسون استفاده می­شود. مهم‌ترین مشکل این روش این است که به دلیل اتصال نامناسب حل­های صریح و ضمنی، در کل دقت مرتبه دوم حفظ نمی­شود. برای حل این مشکل در هر سلول، حل صریح در داخل حل ضمنی به صورت یک تابع غیرخطی ظاهر می­شود. در این صورت یک روش صریح-ضمنی خود سازگار به وجود می­آید. با به کار بردن این تکنیک حل صریح و ضمنی در طول حل، یک ارتباط پیوسته با یکدیگر دارند در نتیجه حل بهبود می­یابد و دقت افزایش پیدا می‌کند. در واقع با این کار عاملی که باعث کاهش دقت روش مورد استفاده می­شود، حذف و دقت مرتبه دو حفظ می­گردد. یک نمونه از روش صریح-ضمنی خود سازگار در ادامه آورده می­شود [40].ارتباط بین حل صریح و ضمنی توسط  در حل صریح برقرار می­شود.

1.حل صریح



2.حل ضمنی



از آنجا که در اینجا بخش پخشی در معادلات وجود ندارد، روش‌های صریح-ضمنی گفته شده به شکل بالا بررسی نمی‌گردد و روش‌های پیش‌بینی و تصحیح که در ادامه آورده می‌شود مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در واقع روش‌های گفته شده در بالا زمانی مورد استفاده قرار می‌گیرند که یک بخش پخشی در معادلات ناویر استوکس وجود داشته باشد.

### روش‌های پیش‌بینی و تصحیح

گاهی اوقات به دلیل پیچیدگی مسئله، معادلات بگونه­ای بدست می­آیند که با استفاده از روش­های ضمنی قابل حل کردن نیستند. به این ترتیب از ترکیب روش­های ضمنی و صریح استفاده می­شود. برای رفع پیچیدگی حل ضمنی ابتدا یک تقریبی از  به کمک روش­های صریح بدست می­آید که به آن گام پیش­بینی می­گویند. سپس با استفاده از مقدار پیش­بینی شده و به کمک روش ضمنی حل تصحیح می­گردد. بطور کلی گام­های پیش­بینی و تصحیح در این روش را با رابطه­ی زیر می­توان نشان داد [31]:

|  |  |
| --- | --- |
| (207) |  |

در رابطه­ی قبل  می­باشد که مقدار پیش­بینی­ شده از جواب حل صریح است. همچنین  بیانگر دقت گسسته­سازی مکانی و  نشان­دهنده­ی صریح یا ضمنی بودن روش (گام پیش­بینی یا گام تصحیح) می­باشد. در روش های پیش­بینی و تصحیح می­توان بیش از یک گام تصحیح استفاده کرد. لامبرت اثرات استفاده از چند گام تصحیح را مورد بررسی قرار داد و با مقایسه­ی اثرات ناشی از بکار بردن گام­های تصحیح مختلف برای یک گام پیش­بینی یکسان، یکی از مهم­ترین نتایجی که گرفت این بود که استفاده از یک گام تصحیح بهینه­ترین حالت می­باشد.[31]

برای ایجاد یک روش پیش­بینی و تصحیح ساده می­توان از روش­های اویلر ضمنی و صریح استفاده کرد که برای رسیدن به جواب مسئله دو مرحله زیر انجام می­گردد :[31]

1.ابتدا طبق رابطه­ی زیر یک جواب توسط روش اویلر صریح پیش­بینی می­گردد.



2.طبق رابطه­ی اویلر ضمنی جواب به شکل زیر تصحیح می­گردد.



به این ترتیب جواب مسئله بدست می­آید. برای افزایش دقت به مرتبه دو و بالاتر به طریق مشابه می­توان روش­های رانگ کوتای مرتبه دو و بالاتر را ایجاد کرد. برای مثال روش رانگ کوتای مرتبه دو به صورت پیش­بینی تصحیح به شکل زیر بدست می­آید:

1.ابتدا طبق روش رانگ کوتای صریح جواب پیش­بینی می­گردد.



2.سپس به کمک روش رانگ کوتای ضمنی جواب تصحیح می­گردد.



از روش پیش­بینی و تصحیح رانگ کوتا معمولاً استفاده نمی­شود چون هزینه­ی استفاده از روش رانگ کوتا بیش از یک بار زیاد است. در واقع به کار بردن روش رانگ کوتا بیش از یک بار باعث بالا رفتن زمان محاسبات و در نتیجه افزایش هزینه محاسباتی می‌گردد.

روش پیش­بینی تصحیح را نیز می­توان به صورت روش­های چند گامی با دقت بالا نوشت. برای مثال می­توان از روش آدامز بشفورث دو گامی به عنوان روش صریح و روش آدامز مولتون دو گامی به عنوان روش ضمنی استفاده کرد. به این ترتیب روش پیش­بینی و تصحیح به صورت زیر بدست می­آید:

1. با استفاده از روش آدامز بشفورث دو گامی ابتدا جواب پیش­بینی شود [29]



2. با استفاده از روش آدامز مولتون دو گامی جواب تصحیح می­گردد.[29]



با بکار بردن روش­ها با تعداد گام بیشتر می­توان روش­های پیش­بینی و تصحیح با دقت بالاتر را ایجاد نمود. یکی از پرکاربردترین روش­های پیش­بینی و تصحیح چندگامی استفاده از روش­های چهار گامی آدامز بشفورث صریح و سه گامی آدامز مولتون ضمنی به صورت زیر می­باشد.

1.جواب اولیه به کمک روش چهار گامی بشفورث در بازه  پیش­بینی می­گردد.[29]



2.جواب پیش­بینی­شده به کمک روش سه گامی مولتون در بازه  تصحیح می­گردد .[29]



این روش با وجود سادگی، دارای دقت مرتبه چهار است به همین دلیل بسیار مورد توجه قرار گرفته ­است. با کنترل خطا مانند روش رانگ کوتا فلبرگ نیز می­توان روش­های پیش­بینی و تصحیح با گام زمانی متغیر را بدست آورد.

### تحلیل سازگاری

مانند روش های صریح برای تحلیل سازگاری روش­های صریح-ضمنی ابتدا معادله­ی مدل زیر برای معادلات ناویر استوکس در نظر گرفته می­شود و طبق بسط تیلور خطای محلی بدست می آید.

|  |  |
| --- | --- |
| (208) |  |

با گسسته­سازی این معادله طبق روش اویلر صریح-ضمنی و گسسته­سازی مکانی مرکزی داریم

|  |  |
| --- | --- |
| (209) |  |

با نوشتن بسط تیلور هر جمله داریم:



****







جملات بسط تیلور را در معادله­ی (209) قرار می­دهیم:

|  |  |
| --- | --- |
| (210) |  |

به این ترتیب خطای محلی برای روش اویلر صریح-ضمنی به شکل زیر بدست می­آید:

|  |  |
| --- | --- |
| (211) |  |

با توجه به خطای محلی وقتی  و  به صفر میل کند، خطای محلی نیز به صفر میل می­کند در نتیجه روش اویلر صریح-ضمنی سازگار می­باشد. برای بررسی سازگاری روش رانگ کوتای صریح-ضمنی خودسازگار، معادله­ی مدل را طبق این روش و تفاضل مرکزی گسسته­سازی می­کنیم، در نتیجه داریم:

|  |  |
| --- | --- |
| (212) |  |

با قرار دادن بسط تیلور جمله­های مختلف در رابطه­ی بالا داریم:

|  |  |
| --- | --- |
| (213) |  |

در نتیجه برای روش رانگ کوتای صریح-ضمنی خطای محلی به شکل زیر بدست می­آید:

|  |  |
| --- | --- |
| (214) |  |

در خطای محلی با کوچک شدن  و مقدار خطا به صفر میل می­کند در نتیجه روش رانگ کوتای صریح-ضمنی نیز سازگار می­باشد.برای مشخص شدن همگرایی این روش­ها باید مسئله با اندازه­های مختلف شبکه حل گردد و استقلال حل از شبکه نشان داده شود.

### تحلیل پایداری

برای بررسی پایداری روش­های صریح-ضمنی در معادلات ناویر استوکس همراه با ویسکوزیته­ی مصنوعی معادله­ی مدل به صورت زیر در نظر گرفته می­شود.

|  |  |
| --- | --- |
| (215) |  |

برای روش اویلر صریح-ضمنی قسمت صریح و ضمنی حل با گسسته­سازی بالا دستی در مکان به صورت زیر بیان می­گردد:

|  |  |
| --- | --- |
| صریح: | ضمنی: |

برای بررسی پایداری این روش طبق تحلیل پایداری فون نیومن در معادلات خطا را به صورت زیر قرار می­دهیم:[34]

|  |  |
| --- | --- |
| (216) |  |

با جایگذاری خطا در معادله­ی صریح و انجام ساده­سازی­های ریاضی داریم:

|  |  |
| --- | --- |
| (217) |  |

در نتیجه شرط پایداری برای قسمت صریح به صورت زیر بدست می­آید:

|  |  |
| --- | --- |
| (218) |  |

برای بررسی پایداری قسمت ضمنی حل نیز خطا را در آن قرار می­دهیم :

|  |  |
| --- | --- |
| (219) |  |

با انجام عملیات ریاضی روی رابطه­ی بالا ضریب رشد برای این معادله بدست می­آید.

|  |  |
| --- | --- |
| (220) |  |

در نتیجه طبق رابطه­ی بالا قسمت ضمنی حل برای تمام حالات پایدار می­باشد. در واقع برای پایدار بودن روش اویلر صریح-ضمنی باید  باشد. برای بررسی پایداری روش­های رانگ کوتای صریح-ضمنی نیز معادله­ی مدل (215) را در نظر می­گیریم. با استفاده از روش رانگ کوتای مرتبه دو و گسسته­سازی بالادستی در مکان قسمت صریح و ضمنی حل برای معادله­ی مدل به صورت زیر بدست می­آید:

|  |  |
| --- | --- |
| حل صریح: | حل ضمنی: |

همانطور که در قسمت روش­های صریح گفته­شد ضریب رشد در روش­های رانگ کوتا به صورت زیر می­باشد. که در آن  عدد کورانت و  عدد موثر موج است .[35]

|  |  |
| --- | --- |
| (221) |  |

مطابق آنچه در روش­های صریح گفته ­شد در روش رانگ کوتای مرتبه دو با گسسته­سازی بالادستی  می­باشد[35] . در نتیجه ضریب رشد به صورت زیر بدست می­آید:

|  |  |
| --- | --- |
| (222) |  |

با انجام عملیات ریاضی مانند آنچه در روش­های صریح انجام شد، شرط پایداری برای قسمت صریح روش رانگ کوتای صریح-ضمنی  می­باشد.

برای بررسی پایداری قسمت ضمنی نیز خطای فون نیومن را در معادله­ی ضمنی قرار می­دهیم. درنتیجه داریم:[31]

|  |  |
| --- | --- |
| (223) |  |

به این ترتیب با اعمال عملیات ریاضی دررابطه­ بالا ضریب رشد به صورت زیر بدست می­آید:

|  |  |
| --- | --- |
| (224) |  |

در نتیجه شرط پایداری برای قسمت ضمنی حل بدست می­آید.

|  |  |
| --- | --- |
| (225) |  |

با توجه به رابطه­ی بالا قسمت ضمنی روش رانگ کوتای صریح-ضمنی برای تمام حالات پایدار می­باشد. پس شرط پایداری روش رانگ کوتای صریح-ضمنی مرتبه دو  می­باشد. با توجه به پایداری قسمت ضمنی، شرط پایداری روش های رانگ کوتای صریح-ضمنی با مرتبه­ی بالاتر و گسسته­سازی مکانی بالادستی و مرکزی مطابق جدول 1 ارائه شده در روش­های صریح می­باشد. برای بررسی پایداری روش­های پیش­بینی تصحیح یک اپراتور انتقال زمانی به صورت زیر تعریف می­کنیم:

|  |  |
| --- | --- |
| (226) |  |

گسسته­سازی مکانی را می­توان به شکل ماتریسی نشان داد. برای مثال بخش جابه­جایی را به صورت زیر در نظر بگیرید که طبق روش بالادستی گسسته شده­است.

|  |  |
| --- | --- |
| (227) |  |

اگر یک شبکه با نقطه موجود باشد برای کل شبکه این گسسته­سازی مکانی را می­توان به شکل ماتریسی زیر نشان داد:[31]

|  |  |
| --- | --- |
| (228) |  |

ماتریس ضرایب به صورت سه قطری می­باشد. حال اگر  یک ماتریس قطری شامل مقادیر ویژه­ی ماتریس گسسته­سازی مکانی باشد می­توان نشان داد که  می­باشد. با استفاده از تعاریف فوق می­توان پایداری روش­های مختلف پیش­بینی و تصحیح را بررسی کرد. برای این کار معادله­ی مدل زیر را در نظر بگیرید:

|  |  |
| --- | --- |
| (229) |  |

فرض کنید که قسمت صریح این معادله با روش اویلر گسسته شود.

|  |  |
| --- | --- |
| (230) |  |

که با اعمال اوپراتور انتقال زمانی و رابطه­ی معادله­ی بالا به شکل زیر بدست می­آید:

|  |  |
| --- | --- |
| (231) |  |

با اعمال انتقال زمانی و به معادله­ی تصحیح نیز داریم [31]:

|  |  |
| --- | --- |
| (232) |  |

این دو رابطه را می­توان به شکل ماتریسی زیر نشان داد[31]:

|  |  |
| --- | --- |
| (233) |  |

برای بررسی پایداری این روش­ها باید مقادیر ویژه ماتریس ضرائب را بدست آورد. مقادیر ویژه این ماتریس طبق رابطه­ی زیر بدست می­آید [31]:

|  |  |
| --- | --- |
| (234) |  |

در صورتی که  باشد (گسسته­سازی مرکزی در مکان) مقادیر ویژه به صورت زیر بدست می­آیند:

|  |  |
| --- | --- |
| (235) |  |

برای پایداری این روش­ها باید تمام مقادیر ویژه کوچکتر از یک باشند. حال اگر در روش تصحیح  باشد (روش اویلر صریح) با قرار دادن مقادیر ویژه­ی ماتریس گسسته­سازی مکانی و بدست آوردن مقادیر ویژه­ی مساله شرط پایداری  بدست می­آید. اما در این حالت هم روش پیش­بینی و هم روش تصحیح، صریح هستند که جواب داری دقت خوبی نیست. حال اگر  باشد (روش اویلر ضمنی) اگر مقادیر ویژه مسئله را بدست آوریم، شرط پایداری مانند قبل  بدست می­آید. این شرط پایداری را با بررسی جداگانه گام­های پیش­بینی و تصحیح نیز می­توان بدست آورد. در گام پیش­بینی از روش اویلر صریح استفاده می­شود و همانطور که در قسمت روش­های صریح دیدیم برای روش اویلر صریح شرط پایداری  می­باشد. در گام تصحیح نیز چون از روش اویلر ضمنی استفاده می­کنیم در تمام حالات پایداری داریم. در نتیجه شرط پایداری برای کل سیستم  می­باشد. برای سایر روش­های پیش­بینی و تصحیح نیز می­توان به طور مشابه پایداری سیستم را بررسی کرد.

### تعیین گام زمانی

در روش­های صریح-ضمنی همانطور که در قسمت قبل دیده ­شد به دلیل وجود یک گام صریح در حل، مشکل پایداری داریم. بنابراین باید گام زمانی با دقت مناسب انتخاب شود. همانطور که در روش­های صریح گفته ­شد برای تعیین گام زمانی دو روش گام زمانی ثابت و گام زمانی متغیر وجود دارد که گام زمانی بر اساس عدد کورانت و شرط پایداری بدست می­آید. البته در روش­های صریح-ضمنی در قسمتی که معادله به صورت ضمنی حل می­گردد، می­توان گام زمانی را بزرگتر از قسمت صریح انتخاب کرد. این مسئله بدلیل اینست که در قسمت ضمنی مشکل پایداری وجود ندارد و روش به ازای تمام گام­های زمانی پایدار می­باشد.

## روش‌های ضمنی

در روش­های ضمنی متغیرهای وابسته در زمان  تابعی از متغیرهای معلوم در زمان  و متغیرهای مجهول در زمان  می­باشد. بنابراین با نوشتن معادله برای یک گره به تنهایی نمی­توان متغیر وابسته در آن گره را مشخص نمود و معادله باید برای تمام گره­ها نوشته شود. در نتیجه برای سیستم، مجموعه معادلات جبری به وجود می­آید و متغیر مجهول در زمان  را برای تمام گره­ها، باید به طور همزمان حل نمود. مهم­ترین مزیتی که روش­های ضمنی دارند اینست که مشکل پایداری ندارند و اکثراً بدون هیچ ­شرطی پایدار هستند و این باعث می­­گردد که بتوان گام زمانی را بزرگ انتخاب کرد ولی هرچه گام زمانی بزرگتر انتخاب گردد، دقت جواب کاهش می­یابد. همچنین برنامه نویسی این روش­ها نسبت به روش­های صریح پیچیده می­باشد. در روش­های ضمنی به دلیل حل یک سیستم بزرگ معادلات جبری خطی بطور همزمان، ماتریس­های بزرگی پدیدار می­گردند و به دلیل وجود این ماتریس­های بزرگ، در هرگام زمانی، زمان محاسبات نسبت به روش صریح بسیار بیشتر می­باشد در نتیجه همگرایی این روش­ها دیرتر انجام می­گردد.

# استخراج معادلات حاکم بر جریان با مرزهای متحرک

اغلب در شبیه سازی مسائل چند بعدی در دینامیک سیالات و یا مکانیک جامدات غیر خطی اعوجاج­های شدیدی در محیط مورد بررسی رخ می­دهد، بنابراین نیاز است بر چنین مسائلی چیره شد تا به توصیف روشن و واضح از مسائل سطوح آزاد سیال-سیال، جامد-جامد و سیال-جامد دست یافت. یکی از موارد بسیار مهمی که در هنگام توسعه­ی یک کد کامپیوتری در این سطح از مسایل مورد توجه قرار می­گیرد، توصیف سینماتیکی محیط پیوسته می­باشد. در واقع چنین امکانی رابطه­ی بین تغییر شکل محیط پیوسته و شبکه محاسباتی را مشخص می­نماید و چنین شرایطی توانایی روش عددی برای سر و کار داشتن با تغییر شکل­های بزرگ و یک وضوح با کیفیت بالا در سطوح تماس مواد و مرزهای سیال را فراهم می­کند. الگوریتم­های مکانیک محیط­های پیوسته عمدتا استفاده از دو توصیف کلاسیک حرکت را مورد توجه قرار می­دهند:

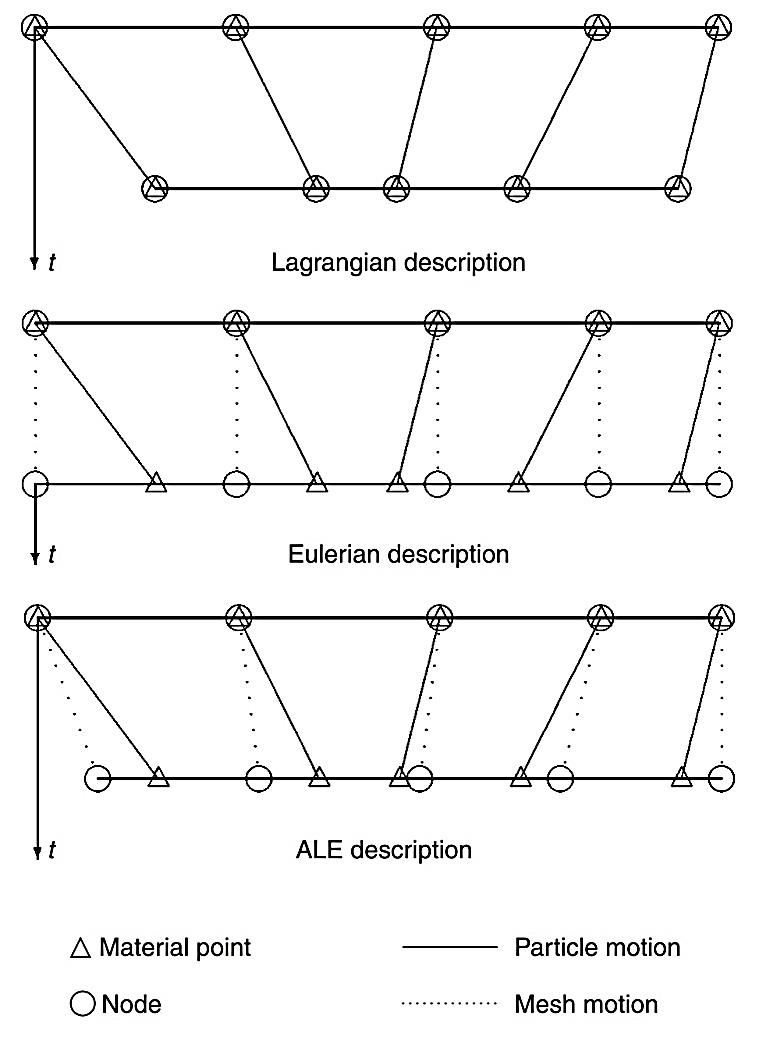
توصیف لاگرانژی

توصیف اویلری

توصیف لاگرانژی-اویلری دلخواه (ALE) که موضوع این فصل می­باشد برای ترکیب برتری­های دو روشِ کلاسیک توصیف سینماتیکی و تا حد امکان به حداقل رساندنِ نقاط ضعف آن­ها توسعه یافته است.

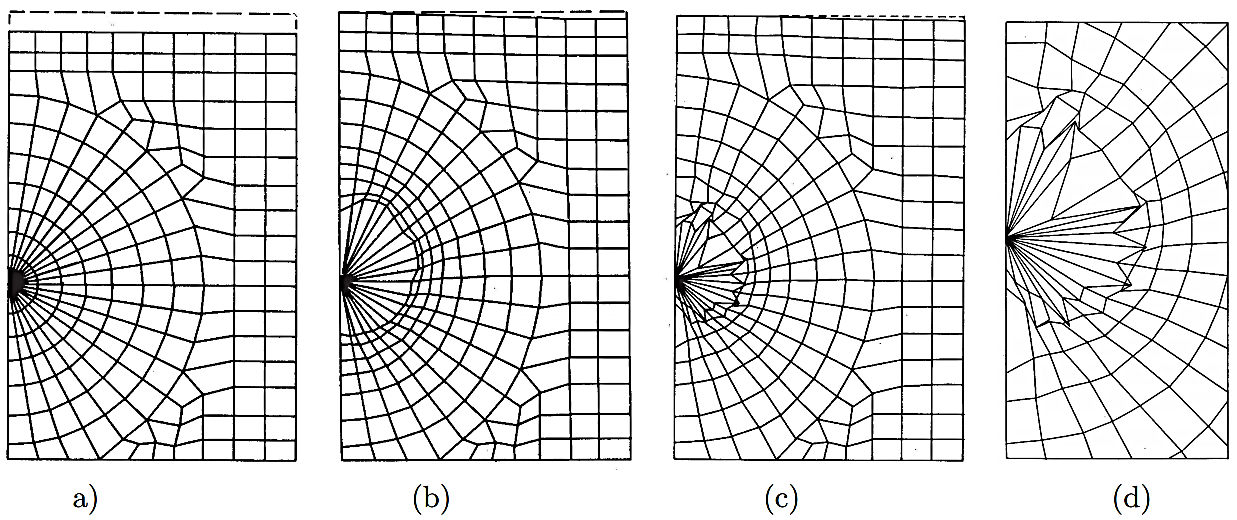
\* الگوریتم­های لاگرانژی، که در آن هر نقطه منفرد از شبکه محاسباتی در بردارنده­ی مقداری از ماده متصل به آن نقطه در طول حرکت است (‏شکل (14) ) و عمدتاً در مکانیک جامدات مورد استفاده قرار می­گیرد. توصیف لاگرانژی امکان پیگیری آسان سطح آزاد و یا سطوح بین مواد مختلف را فراهم می­کند. این روش همچنین امکان مدل کردن رفتار مواد را با استفاده از روابط اساسی وابسته به زمان تسهیل می­نماید. ضعف این روش عدم توانایی آن در مدل کردن اعوجاج­های بزرگ در دامنه­ی محاسباتی بدون متوسل شدن به تولید شبکه­های مکرر می­باشد.

\* الگوریتم اویلری به صورت گسترده در دینامیک سیالات مورد استفاده قرار می­گیرد. در این روش همان طور که در ‏شکل (14) مشاهده می­گردد، شبکه­ی محاسباتی ثابت می­باشد و این ماده­ی پیوسته است که نسبت به شبکه حرکت می­کند. در توصیف اویلری، اعوجاج­های بزرگ در حرکت محیط پیوسته با راحتی نسبی قابل مدل کردن می­باشد (مزیت روش) اما به طور کلی هزینه­ی آن با کاهش دقت در توصیف مرزهای بین دو فاز و جزئیات جریان پرداخته می­شود (ضعف روش).



1. مثالی یک بعدی از حرکت ذرات و شبکه­ها در توصیف­های لاگرانژی، اویلری و ALE

به دلیل نقاط ضعف­ توصیف­های اویلری خالص و لاگرانژی خالص، روشی توسعه یافته است که تا حدودی قادر به ترکیب برتری­های این دو روش شده است. این روش Arbitrary Lagrangian-Eulerian و یا به اختصار ALE نامیده می­شود. در توصیف روش ALE گره­های شبکه­ محاسباتی ممکن است مانند روش لاگرانژی همراه ذرات حرکت کنند، یا همانند روش اویلری ثابت باشند و یا به صورت دلخواه تعیین شده حرکت نمایند تا توانایی اصلاح محدوده­ی ماده­ی پیوسته را داشته باشند (‏شکل (14) ). به دلیل این آزادی در حرکت شبکه­ محاسباتی که توسط روش ALE پیشنهاد می­شود، این روش قابلیت بیشتری در مدل کردن اعوجاج­های بزرگ را در محیط پیوسته نسبت به روش لاگرانژی خالص دارا می­باشد و نسبت به روش اویلری خالص وضوح بیشتری در اختیار قرار می­دهد. مثال ساده­ در ‏شکل (15) توانایی روش ALE را در وفق دادن اعوجاج­های بزرگ شبکه­ محاسباتی در حین حفظ وضوح نمایش مرز بین دو فاز مختلف را در مقایسه با روش لاگرانژی خالص نشان می­دهد. یک شبکه المان محدود درشت برای مدلسازی انفجار یک ماده منفجره در یک مخزن سیلندری بشدت قوی و پر شده از آب استفاده شده است. در شکل یک مقایسه در پیکربندی شبکه‌­ها در زمان بترتیب در دو روش ALE و لاگرانژی تنها، نشان داده شده است. بنابر شواهد جزئیات سطح مشترک انفجار و آب می­توان نتیجه گرفت، روش لاگرانژی از ضعف در کاهش شدید کیفیت شبکه­ محاسباتی در محل برخورد دو فاز رنج می­برد در حالی که با استفاده از روش ALE، همچنان در محل برخورد دو فاز شبکه بندی نسبتاً منظمی موجود می­باشد.



1. مقایسه­ی توصیف لاگرانژی در مقابل ALE a) شبکه المان محدود اولیه b) شبکه ALE در زمان c) شبکه لاگرانژی در زمان d) جزئیات در محل برخورد بین دو فاز در روش لاگرانژی

هدف این فصل مطالعه­ی اجمالی روش ALE می­باشد که شامل دو بخش جنبه­های مفهومی و جزئیات اجرای عددی با دید کاربرد در مسائل دارای تغییر شکل­های بزرگ مواد به خصوص در زمینه­ی دینامیک سیالات، مکانیک جامدات غیر خطی و اندرکنش سازه و سیال می­باشد. در بخش بعدی توصیف سینماتیکی ALE به عنوان تعمیمی از توصیفات کلاسیک لاگرانژی و اویلری حرکت معرفی می­شود. این تعمیم بر پایه معرفی مفهومی به نام دامنه­ی مرجع (در اینجا منظور دامنه نقاط شبکه) و تصویرکردن دامنه­ی مرجع بر دامنه­های کلاسیک، مادی و فضایی استوار است. سپس معادله­ی اساسی ALE معرفی می­گردد که رابطه­ی بین مشتق زمانی دامنه مادی و مشتق زمانی دامنه مرجع را بیان می­کند. بر این اساس، فرم ALE معادلات پایه بقاء یعنی معادلات بقای جرم، مومنتم و انرژی به دست می­آیند. سپس جنبه­های محاسباتی معادلات بقا در توصیف ALE مورد بررسی قرار می­گیرد.

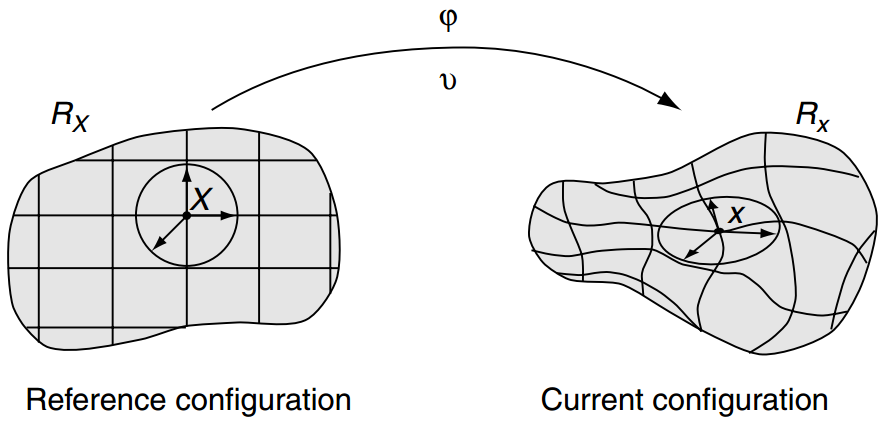
## روش‌های توضیف حرکت

چون توصیف حرکت به روش ALE تعمیمی از توصیفات لاگرانژی و اویلری می­باشد، در ابتدا مروری کوتاه بر این توصیفات کلاسیک حرکت می­شود.

### دیدگاه‌های لاگرانژی و اویلری

در مکانیک محیط­های پیوسته عمدتا دو دامنه مورد استفاده قرار می­گیرد. دامنه­ی مادی که می­باشد، ابعاد فضا و مجموعه اعداد حقیقی است و این دامنه از ذرات مادی تشکیل شده است. دامنه دیگر دامنه­ی فضایی است که شامل نقاط فضایی می­باشد.

دیدگاه لاگرانژی شامل دنبال کردن ذرات مادی محیط پیوسته در حرکتی که دارند، است. بدین منظور، در ‏شکل (16) یک شبکه محاسباتی معرفی می­کند که حرکت ذرات محیط پیوسته را دنبال می­کند، نقاط شبکه به صورت جدایی ناپذیر به ذرات ماده متصل هستند.



1. توصیف لاگرانژی حرکت

مختصات مادی ، اجازه­ی معرفی پیکره­بندی مرجع را به دست می­دهد. حرکت ذرات مادی، مختصات مادی را به مختصات فضایی نسبت می­دهد. این عملیات توسط عملگر بصورت زیر تعریف شده است: (نکته: در تمام متن این فصل حروفی که به صورت Bold نمایش داده می­شوند برداری می­باشند.)

(236)

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

که امکان ارتباط بین و را با استفاده از قانون حرکت فراهم می­کند و به شکل زیر بیان می­شود.

|  |  |
| --- | --- |
| (237) |  |

به صورت صریح می­توان خاصیت فیزیکی را به صورت زیر بیان نمود:

**اول:** مختصات فضایی به ذرات ماده و زمان وابسته است.

**دوم:** زمان فیزیکی با متغیر یکسان در هر دو دامنه مادی و فضایی استفاده شده است.

برای هر لحظه­ی مشخص ، تابع تبدیل ، یک پیکربندی را در دامنه فضایی تعریف می­کند. برای بیان گرادیان استفاده از بیان ماتریسی متداول است.

|  |  |
| --- | --- |
| (238) |  |

که در آن یک بردار سطری صفر و سرعت ماده است که به صورت زیر بیان می­شود:

|  |  |
| --- | --- |
| (239) |  |

و علامت به معنی ثابت نگه داشتن مختصات مادی است.

واضح است که نگاشت یک به یک باید شرط (غیر صفر باشد تا تناظر یک به یک را تحمیل کند و مثبت باشد تا از تغییر جهت محورهای مختصات مرجع جلوگیری کند) را در هر نقطه­ی و هر لحظه­ی برآورده نماید. بدین وسیله امکان دانستن مسیر حرکت ذره از ابتدای دامنه‌ی زمانی، با استفاده از تبدیل معکوس ، در هر لحظه وجود دارد. یعنی می­توان موقعیت اولیه ذره مادی که موقعیت در زمان را اشغال کرده محاسبه کرد.

از آنجایی که ذرات ماده و نقاط شبکه متناظر در طی حرکت بر هم منطبق هستند، بنابراین در محاسبات با استفاده از دیدگاه لاگرانژی ترم جابجایی وجود ندارد و مشتق مادی به یک مشتق ساده نسبت به زمان کاهش می‌یابد. این حقیقت که هر المان محدود در دیدگاه لاگرانژی شامل ذره مادی ثابتی می­باشد (عدم تغییر در زمان) سبب برتری­های قابل توجهی از دیدگاه محاسباتی می­گردد، به خصوص در مسائلی که مواد رفتار وابسته به زمان دارند. اگرچه هنگامی که تغییرات بزرگی در ماده رخ می­دهد، برای مثال گردابه­ها در سیالات، الگوریتم لاگرانژی به سمت کاهش دقت پیش می­رود و حتی ممکن است به دلیل اعوجاج­های بیش از حد شبکه محاسباتی توانایی به پایان رساندن یک محاسبه را نداشته باشد.

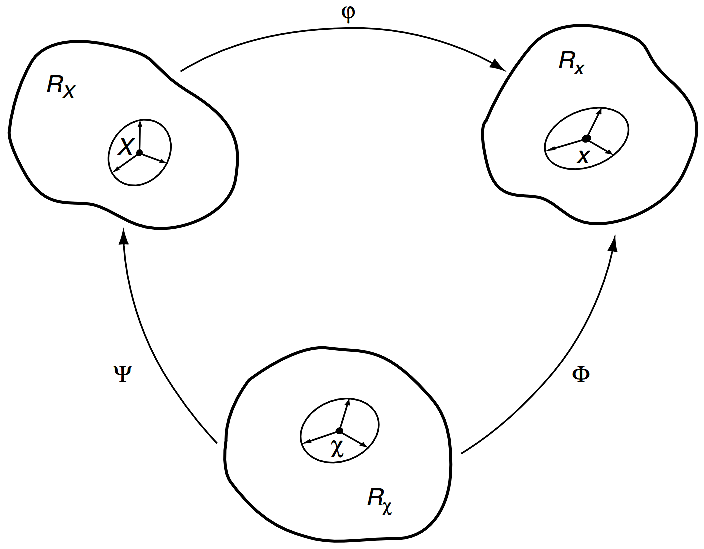
مشکلات ایجاد شده به دلیل اعوجاج بیش از حد در شبکه المان محدود در دیدگاه اویلری حل شده است. ایده­ی اصلی در دیدگاه اویلری که به شدت در دینامیک سیالات مورد توجه است، عبارتند از مقادیر فیزیکی وابسته به ذرات سیالی است که از یک ناحیه ثابت از فضا عبور می­کنند. بنابراین در توصیف اویلری شبکه المان محدود ثابت است و محیط پیوسته نسبت به شبکه محاسباتی حرکت می­کند و دچار تغییر شکل می­گردد. قوانین بقا در دیدگاه اویلری به صورت تابعی از مختصات فضایی و زمان بیان می­شوند. بنابراین توصیف اویلری حرکت، تنها شامل متغیرها و توابعی است که اهمیت آنی در یک ناحیه ثابت از فضا را دارند. سرعت مادی در یک نقطه از شبکه برابر است با سرعت ذره­ای که در آن لحظه از آن نقطه عبور می­کند. در نتیجه سرعت نسبت به یک المان ثابت و بدون هرگونه ارجاع به پیکره بندی اولیه محیط پیوسته و مختصات مادی به فرم روبرو بیان می‌گردد: .

از آنجایی که دیدگاه اویلری وابستگی بین نقاط شبکه و ذرات ماده را از بین می­برد، ترم جابجایی به دلیل حرکت نسبی بین تغییر شکل ماده و شبکه محاسباتی ظاهر می­گردد. الگوریتم اویلری به دلیل ذات عدم تقارن در عملگرهای جابجایی سبب سختی­های محاسباتی می­شود اما در عوض اجازه­ی مدل کردن حرکات پیچیده­ی ماده را فراهم می­کند. در مقایسه با دیدگاه لاگرانژی،دیدگاه اویلری دچار مشکلات جدی در تغییر شکل در سطوح بین دو فاز مختلف و مرزهای متحرک است.

### توصیف سینماتیکی ALE

یاد­آوری بالا در مورد دیدگاه­های اویلری و لاگرانژی برتری­ها و ضعف­های هر کدام از این روش­ها را نشان داده است. همچنین پتانسیل روشی تعمیم یافته که برتری­های این دو روش را به همراه داشته باشد و ضعف­ها را به حداقل برساند، نشان داده شده است. به این روش تعمیم یافته، روشArbitrary Lagrangian-Eulerian گفته می­شود. روش ALE در ابتدا در زمینه­های تفاضل محدود و حجم محدود ارایه شد.

در توصیف حرکت به روش ALE، نه پیکر بندی مادی و نه پیکر بندی فضایی به عنوان مرجع انتخاب نمی­شوند، بنابراین به یک دامنه سوم نیاز می­باشد. پیکر بندی مرجع که مختصات مرجع برای مشخص نمودن نقاط شبکه معرفی شده­اند. ‏شکل (17) این دامنه­ها و تبدیل­های یک به یک که این مختصات را به یکدیگر مرتبط می­کنند، نشان می­دهد.



1. حرکت شبکه­ محاسباتی ALE مستقل از حرکت مادی است

دامنه­ی مرجع با استفاده از تبدیل­های و به ترتیب به دامنه­های مادی و فضایی تصویر می­گردند. حرکت ذره می­تواند با استفاده از مشخص شود ( علامت ، علامت ترکیب توابع می­باشد)، واضح است که سه تبدیل ، و از یکدیگر مستقل نیستند.

تبدیل که نگاشت از دامنه­ی مرجع به دامنه­ی فضایی می­باشد می­تواند نشان دهنده­ی حرکت نقاط شبکه در دامنه فضا باشد. این تبدیل توسط رابطه­ی زیر مشخص می­گردد:

|  |  |
| --- | --- |
| (240) |  |

و گرادیان آن عبارت است از:

|  |  |
| --- | --- |
| (241) |  |

که سرعت شبکه برابر است با:

|  |  |
| --- | --- |
| (242) |  |

باید یادآوری شود که هم حرکت ماده و هم حرکت شبکه نسبت به دامنه­ی فضایی سنجیده می­شوند. بنابراین سرعت حرکت ماده و سرعت حرکت شبکه مربوطه با مشتق معادلات حرکت ذره و شبکه نسبت به زمان حاصل می­شود.

در نهایت درباره تبدیل راحت­تر است مستقیماً معکوس آن مشخص شود:

|  |  |
| --- | --- |
| (243) |  |

و گرادیان آن عبارت است از:

|  |  |
| --- | --- |
| (244) |  |

که سرعت توسط رابطه­ی زیر تعریف می­شود:

|  |  |
| --- | --- |
| (245) |  |

و می­توان آن را به عنوان سرعت ذره نسبت به دامنه­ی مرجع (منظور دامنه نقاط شبکه) بیان داشت، زیرا تغییرات زمانی مختصات مرجع را که ذره ی در آن ثابت است، اندازه گیری می­کند. رابطه­ی بین سرعت­های ، و را می­توان از طریق مشتق گیری از رابطه بدست آورد.

|  |  |
| --- | --- |
| (246) |  |

یا به شکل ماتریسی زیر می­توان بیان کرد:

|  |  |
| --- | --- |
| (247) |  |

که پس از ضرب ماتریسی (درایه سطر اول و ستون دوم) می­توان به تساوی زیر دست یافت:

|  |  |
| --- | --- |
| (248) |  |

این معادله را می­توان به فرم زیر باز نویسی کرد:

|  |  |
| --- | --- |
| (249) |  |

که سرعت جابجایی یا به عبارت دیگر سرعت نسبی بین ماده و شبکه می­باشد.

باید توجه داشت که سرعت جابجایی معادله (249) نباید با (معادله(245)) اشتباه گرفته شود. همان طور که قبلا هم ذکر شد، سرعت ذره در هنگامی است که از دامنه­ی مرجع دیده می­شود و سرعت ذره نسبت به شبکه است هنگامی که از دامنه­ی فضایی دیده می­شود (متغیرهای و مربوط به مختصات می­باشند). در واقع معادله­ی (85) نشان می­دهد که اگر و تنها اگر (که ماتریس واحد است)، این حالت زمانی اتفاق می­افتد که شبکه تنها حرکت انتقالی داشته باشد و هیچ نوع دوران و تغییر شکلی در آن رخ ندهد.

بعد از این که مفاهیم اساسی در سینماتیک ALE بیان شد، می­توان ثابت کرد که هر دو نوع فرمول بندی لاگرانژی و اویلری، به عنوان موارد خاص قابل دست یابی هستند. با انتخاب ، معادله­ی(238) به کاهش می­یابد و نتیجه­ی آن توصیف لاگرانژی می­باشد. سرعت­های ماده و شبکه، معادلات (239)و (242) مطابق یکدیگر می­شود و سرعت جابجایی ((249)) برابر با صفر می­گردد (هیچ ترم جابجایی در معادلات بقا وجود ندارد). از طرف دیگر اگر ، معادله­ی(237)به ساده می­گردد و یک توصیف اویلری حاصل می­شود. از معادله­ی (242) برای سرعت شبکه مقدار صفر حاصل می­شود و سرعت جابجایی به سادگی با سرعت برابر می­گردد.

در روش ALE آزادی عمل حرکت شبکه­­ها بسیار جالب می­باشد. این خاصیت سبب ترکیب خواص مفید روش­های لاگرانژی و اویلری می­گردد. البته این موضوع می­تواند تحت تاثیر فرآیند تعیین سرعت شبکه در یک مسئله خاص قرار بگیرد. در نتیجه استفاده عملی از توصیف ALE در مسائل، نیاز به آن دارد که یک الگوریتم تعیین اتوماتیک جابجایی شبکه از قبل فراهم گردد.

## معادله اساسی ALE

برای نشان دادن قوانین بقای جرم، مومنتم و انرژی در چارچوب ALE به یک رابطه بین مشتق زمانی دامنه مادی، که ذات قوانین بقا می­باشد و مشتق زمانی دامنه مرجع نیاز است.

### مشتق‌های زمانی دامنه‌های مادی، فضایی و مرجع

برای ایجاد ارتباط بین مشتق­های زمانی در دامنه­های مادی، فضایی و مرجع، یک مقدار فیزیکی اسکالر بصورت ، و تعریف شده اند که به ترتیب مربوط به دامنه­های فضایی، مرجع و مادی می­باشند. ستاره­های به کار رفته برای تاکید بر این موضوع است که فرم توابع به طور کلی از یکدیگر متفاوت می­باشد. (باید توجه داشت که نتیجه هر سه در یک موقعیت مشخص باید یکسان باشد.)

از آنجا که حرکت ذره یک تابع تبدیل (نگاشت) است، توصیف فضایی و توصیف مادی از مقادیر فیزیکی به شکل زیر می­توان به یکدیگر مرتبط کرد:

|  |  |
| --- | --- |
| (250) |  |

گرادیان­های عبارت فوق نیز به آسانی به شکل زیر محاسبه می­گردند (مشتق زنجیره­ای):

|  |  |
| --- | --- |
| (251) |  |

که می­توان آن را به صورت ماتریسی نیز مطابق فرم زیر بررسی کرد:

|  |  |
| --- | --- |
| (252) |  |

بعد از ضرب ماتریس فوق اولین عبارتی که آشکار می­شود می­باشد، اما آنچه که بیشتر مورد توجه است عبارت دوم یعنی معادله­ی زیر می­باشد:

|  |  |
| --- | --- |
| (253) |  |

توجه شود که این همان معادله­ی معروفی می­باشد که رابطه­ی بین مشتق مادی و فضایی را نسبت به زمان مشخص می­نماید. برای راحتی با حذف ستاره­ها از این معادلات در نهایت می­توان معادلات را به شکل زیر نوشت:

|  |  |
| --- | --- |
| (254) |  |

که به شکل معمول می­توان آن را این گونه تفسیر کرد: تغییرات مقدار فیزیکی برای یک ذره مشخص برابر است با ترم تغییرات مکانی بعلاوه ترم جابجایی که حرکت نسبی بین دستگاه مختصات مادی و فضایی (آزمایشگاه) را نشان می­دهد. علاوه بر این، برای اینکه باقی متن با نشانه گذاری بیش از حد تکرار نشود (جز در موارد خاص) مشتق زمانی دامنه مادی به صورت زیر:

|  |  |
| --- | --- |
| (255) |  |

و مشتق زمانی دامنه فضایی به صورت زیر استفاده می­شود:

|  |  |
| --- | --- |
| (256) |  |

حال رابطه­ی بین مشتق­های دامنه مادی و فضایی نسبت به زمان برای مشتق زمانی دامنه مرجعی گسترش می­یابد. با استفاده از تابع تبدیل (نگاشت) ، تبدیل از توصیف مرجع مقدار فیزیکی اسکالر به توصیف مادی به شکل زیر قابل نوشتن است:

|  |  |
| --- | --- |
| (257) |  |

و گرادیان عبارت فوق به راحتی بصورت زیر قابل محاسبه است:

|  |  |
| --- | --- |
| (258) |  |

یا فرم ماتریسی:

|  |  |
| --- | --- |
| (259) |  |

که پس از ضرب ماتریسی می­توان به تساوی زیر دست یافت (مشتق زنجیره­ای):

|  |  |
| --- | --- |
| (260) |  |

باید اشاره شود که این معادله مشتق دامنه مادی و مرجعی نسبت به زمان را به یکدیگر مرتبط می­نماید. اگرچه نیاز به محاسبه­ی گرادیان مقدار مورد نظر در دامنه مرجعی می­باشد، این کار قابل اجرا است اما در مکانیک محاسباتی معمولاً کار کردن در دامنه فضایی (یا مادی) آسان­تر است. علاوه بر این در سیالات، روابط بنیادی به طور طبیعی در دستگاه مختصات فضایی بیان می­گردند. بنابراین با استفاده از تعریف که در معادله­ی (248)داده شده است، معادله­ی قبل را می­توان به شکل زیر بازنویسی نمود:

|  |  |
| --- | --- |
| (261) |  |

سرانجام رابطه­ی اساسی ALE بین مشتق زمانی مادی، مشتق زمانی مرجعی و گرادیان فضایی به صورت زیر بیان می­گردد (اندیس های ستاره حذف شده اند):

|  |  |
| --- | --- |
| (262) |  |

معادله فوق مشتق زمانی یک مقدار فیزیکی برای یک ذره مشخص را نشان می­دهد و مشتق زمانی مادی آن خاصیت است. مشتق زمانی مادی یک خاصیت، از ترم تغییرات محلی خاصیت فیزیکی در طی زمان (که در آن دستگاه مختصات مرجع به صورت ثابت فرض می­شود) به علاوه­ی ترم جابجایی با استفاده از سرعت نسبی (سرعت نسبی بین دامنه­ی مادی و دامنه­ی مرجع) تشکیل شده است. این معادله با معادله­ی(254) معادل می­باشد اما با این تفاوت که در فرمول نویسی ALE، مرجع می­باشد.

### مشتق زمانی از انتگرال‌ها بر روی حجم‌های متحرک

برای به دست آوردن فرم انتگرالی قوانین بقای جرم، مومنتم و انرژی، نیاز به آن است که نرخ تغییر انتگرال­های توابع اسکالر و برداری بر روی یک حجم کنترل متحرک که سیال را احاطه نموده، محاسبه شود.

حجمی از ماده که توسط یک سطح بسته­ی مجازی احاطه شده است، در نظر گرفته شود که تمام نقاط این حجم در زمان با سرعت مادی و در حال حرکت هستند. یک حجم مادی، حجمی است که همواره ذراتی ثابت از محیط پیوسته تحت بررسی را در بر می­گیرد. مشتق زمانی مادی از انتگرال یک تابع اسکالر (توجه شود که در دامنه­ی فضایی تعریف شده است) بر روی تغییرات زمانی حجم مادی توسط رابطه­ی معروف زیر که از آن با عنوان تئوری انتقال رینولدز یاد می­شود، بیان می­گردد:

|  |  |
| --- | --- |
| (263) |  |

که این رابطه برای تغییرات آرام ، برقرا می­باشد. انتگرال حجم موجود در سمت راست معادله بر روی حجم کنترل (ثابت در فضا) تعریف شده است که این حجم کنترل با حجم کنترل مادی متحرک به نام در لحظه­ی منطبق شده است. مشابه این مطلب سطوح کنترلی و نیز در زمان بر هم منطبق هستند. در انتگرال سطح، نمایانگر بردار یکه نرمال بر سطح در لحظه­ی می­باشد و بردار سرعت ذرات مادی بر روی نقاط مرزی است. ترم اول سمت راست معادله­ی (263)مشتق زمانی محلی از انتگرال حجم است و ترم دوم انتگرال سطح مرزی، مقدار شار عبوری متغیر اسکالر از مرز ثابت حجم کنترل را تعیین می­کند. توجه شود که (قضیه گوس):

|  |  |
| --- | --- |
| (264) |  |

که با استفاده از این معادله یک شکل دیگری از معادله­ی انتقال رینولدز به شکل زیر حاصل می­گردد:

|  |  |
| --- | --- |
| (265) |  |

به روش مشابه مشتق زمانی مادی بر روی انتگرال حجم از یک متغییر برداری محاسبه می­شود. فرمول بندی مشابه در زمینه ALE قابل توسعه است که شامل مشتق زمانی مرجعی باشد، در این حالت سرعت مادی به سرعت شبکه تغییر می­کند.

## بیان معادلات حاکم بر جریان تراکم پذیر بصورت دیدگاه ALE

در این بخش فرم­های دیفرانسیلی و انتگرالی معادلات بقاء جرم، مومنتم و انرژی برای جریان تراکم پذیر بیان می­شود.

### فرم دیفرانسیلی معادلات بقا از دیدگاه ALE

فرم دیفرانسیلی معادلات بقاء جرم، مومنتم و انرژی با استفاده از دیدگاه ALE به راحتی از فرم اویلری شناخته شده متناظر آن قابل تعیین است. معادلات بقا از دیدگاه اویلری عبارتند از:

|  |  |
| --- | --- |
| (266) |  |
| (267) |  |
| (268) |  |

که در آن چگالی، بردار سرعت مادی، تانسور تنش کوشی، بردار نیروی حجمی مخصوص و انرژی کل مخصوص می­باشد. در معادله انرژی فوق تنها انرژی مکانیکی در نظر گرفته شده است. توجه شود که جمله تنش در همان معادله (معادله انرژی) را می­توان به صورت زیر نیز نوشت:

|  |  |
| --- | --- |
| (269) |  |

که در آن گرادیان سرعت فضایی است. همچنین اغلب از معادله موازنه انرژی درونی به عنوان معادله انرژی استفاده می­شود.

|  |  |
| --- | --- |
| (270) |  |

که در آن انرژی درونی مخصوص و تانسور نرخ کرنش و بخش متقارن گرادیان سرعت یعنی ***اشاره دارد.***

کاری که باید انجام داد تا فرم ALE معادلات بقا حاصل شود این است که در تمام جملات جابجایی موجود، سرعت مادی با سرعت جابجایی  *جایگزین شود.*

|  |  |
| --- | --- |
| (271) |  |
| (272) |  |
| (273) |  |
| (274) |  |

همچنین باید به این نکته توجه شود که سمت راست معادلات (271) تا(274) به فرم کلاسیک اویلری (فضایی) نوشته شده است، در حالی که حرکت دلخواه شبکه محاسباتی تنها در سمت چپ منعکس می­شود. مبدا اصلی معادلات (271)تا(274) و تشابه آنها با معادلات اویلر معادلات (266) تا (268)موجب شده است که تعدادی از محققین این روش را توصیف شبه اویلری نامگذاری کنند.

**توجه:** شتاب شبکه هیچ نقشی در معادلات ALE ندارد، بنابراین تنها شتاب مادی (مشتق مادی سرعت نسبت به زمان) مورد نیاز می­باشد. شتاب در فرمول نویسی لاگرانژی، اویلری و ALE بترتیب به صورت زیر بیان می­شوند:

شتاب در توصیف لاگرانژی:

شتاب در توصیف اویلری:

شتاب در توصیف ALE:

در معادلات شتاب توصیف­های اویلری و ALE اولین جمله بیانگر شتاب محلی و دومین جمله بیانگر شتاب جابجایی می­باشد.

### فرم انتگرالی معادلات بقا از دیدگاه ALE

نقطه شروع برای بدست آوردن فرم انتگرالی معادلات بقا از دیدگاه ALE، تئوری انتقال رینولدز(263) می­باشد که بر یک حجم کنترل دلخواه که مرزهایش با سرعت شبکه حرکت می­کند، بکار می­رود:

|  |  |
| --- | --- |
| (275) |  |

در معادله فوق بصورت صریح، مشتق زمانی بخش اول سمت راست معادله، مشابه مشتق زمانی دامنه فضایی می­باشد. بنابراین برای بدست آوردن فرم انتگرالی معادلات بقا جرم، مومنتم و انرژی به ترتیب به جای تابع اسکالر ، چگالی ، مومنتم و انرژی کل مخصوص قرار داده می­شود.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| (276) | |  |
| (277) | |  |
| (278) |  | |

توجه شود که فرم انتگرالی ALE معادلات بقا حاوی توصیفات لاگرانژی و اویلری نیز می­باشد. توصیف لاگرانژی با قرار دادن و توصیف اویلری با قرار دادن در معادلات انتگرالی فوق بدست می­آید.

در این بخش فرم­های دیفرانسیلی و انتگرالی معادلات بقا از دیدگاه ALE بدست آمد و به عنوان پایه و اساس برای گسسته سازی­های فضایی مسائل دینامیک سیالات و مکانیک جامد قابل استفاده است.

## قانون بقا هندسی (GCL)

در یک سری از مقالات (فرهت و همکاران) موضوع قانون بقاء هندسی را برای محاسبات جریان ناپایا بر روی شبکه­های متحرک و در حال تغییر شکل ارائه کردند. نیاز اساسی به این قانون از آنجا پدید آمد که هر روش محاسباتی ALE باید قادر به پیش بینی دقیق حل بدیهی جریان یکنواخت باشد. یعنی حرکت و تغییر شکل شبکه در حین حل معادلات ALE نباید در حل جریان یکنواخت تغییری ایجاد کند. معادله ALE موازنه جرم معمولاً به عنوان نقطه شروع برای بدست آوردن قانون بقاء هندسی بکار می­رود. با فرض یک میدان جریان یکنواخت با چگالی و بردار سرعت مادی ، معادله بقاء جرم به قانون بقاء هندسی پیوسته (CGCL)(معادله (279)) تبدیل می­شود.

|  |  |
| --- | --- |
| (279) |  |

معادله فوق را می­توان از سایر معادلات بقا انتگرالی ALE با اعمال محدودیت جریان یکنواخت بدست آورد. با انتگرال گیری نسبت به زمان از تا قانون بقا هندسی گسسته (DGCL) ارائه می­شود.

|  |  |
| --- | --- |
| (280) |  |

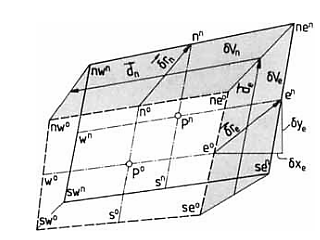
که بیان می­کند تغییرات حجم (یا سطح در دو بعد) هر المان از زمان تا باید برابر با حجم (یا سطح) جاروب شده به وسیله سطوح مرزی المان در طی بازه زمانی است. با فرض اینکه حجم­های در سمت چپ معادله (280)را می­توان دقیق محاسبه کرد، به همین میزان نیز نیاز به به محاسبه دقیق شار در سمت راست معادله می­باشد. این مسئله تعدادی محدودیت در بروزرسانی موقعیت و سرعت گره (شبکه) ایجاد می­کند. به عنوان مثال، لسوین و فرهت 1996 نشان دادند که برای روش انتگرال گیری زمانی مرتبه اول سرعت شبکه باید با استفاده از رابطه محاسبه شود. ( آنها به این نتیجه رسیدند استفاده از معادله GCL برای محاسبه سرعت شبکه بخصوص در مسائل FSI مشکلاتی ایجاد می­کند و از این معادله باید برای محاسبه حجم سلول­ها استفاده شود.)

معادله GCL نیز باید بصورت عددی حل شود و باید از روش یکسان که برای انتگرال­گیری معادلات بقاء سیال استفاده شده است، برای گسسته سازی معادله GCL استفاده کرد تا یک حل سازگار برای محاسبه مساحت محلی سلول­ها مهیا شود. با توجه به مرجع زمانی که از گسسته سازی زمانی رانگ کوتا استفاده می­شود می­توان معادله GCL را در دو بعد بصورت زیر گسسته سازی نمود:

برای یک شبکه متحرک، جریان یکنواخت تنها در صورتی که مساحت سلول­ها با استفاده از فرم گسسته سازی شده قانون بقاء هندسی محاسبه شود، حفظ می­شود. برای حالات در نظر گرفته شده در تحقیق حاضر، اثر استفاده از شرط بقاء هندسی در مقایسه با تعیین هندسی مساحت سلول­ها کوچک می باشد. با توجه به اینکه میزان جابجایی در هر گام جابجایی از برنامه کوچک می­باشد بنابراین می­توان از گسسته سازی معادله GCL صرف نظر کرد و مساحت سلول­ها در طی گامهای جابجایی و تغییر شکل شبکه با استفاده از روابط هندسی تعیین شود.

## بدست آوردن سرعت شبکه و شار اضلاع متحرک

در روش ALE در معادلات حاکم یک ترم جدید ظاهر می‌گردد که مانع بسته شدن دستگاه معادلات می‌شود. این ترم، سرعت شبکه است که با نشان داده شده است. با استفاده از مختصات پیشین و جدید نقاط می­توان سرعت شبکه را به دست آورد. این کار توسط روش ارائه شده توسط آقایان Demirdzic و Peric انجام می­گردد. با فرض اینکه تغییرات یک شبکه دلخواه در فاصله­ی زمانی به صورت ‏شکل (18) نمایش داده شود، در این صورت برای بدست آوردن سطحی که در این بازه­ی زمانی برای مثال در سمت e(east) جاروب می­شود را می­توان با رابطه­ی (281) به دست آورد. (بالانویس o نشان دهنده­ی گام زمانی قبل (old) و بالانویس n نشان دهنده­ی گام زمانی جدید (new) می­باشد.)

**

1. تغییر شکل یک شبکه فرضی در بازه زمانی

|  |  |
| --- | --- |
| (281) |  |

که در معادله­ی بالا نشان دهنده­ی سرعت صفحه­ی سمت راست (east) می­باشد و می­توان حجم جاروب شده توسط وجه e را به دست آورد:

|  |  |
| --- | --- |
| (282) |  |

در رابطه فوق علامت ، علامت ضرب خارجی دو بردار می­باشد. و بردارهای و بر اساس‏شکل (18) به ترتیب به صورت روابط (283)و (284)محاسبه می­شوند.

|  |  |
| --- | --- |
| (283) |  |
| (284) |  |

## معادلات حاکم بر جریان سیال از دیدگاه ALE

شکل کلی و کامل معادلات حاکم بر جريان سیال، معادلات ناوير-استوکس می­باشد که بر اساس قانون پيوستگی (بقا جرم)، قانون دوم نيوتن (بقا مومنتم) و قانون بقا انرژی برای محيط پيوسته استخراج می­شوند. سه معادله بقا مورد نیاز بیان می­دارند که خاصیت‌های اساسی جرم، مومنتم و انرژی در سراسر جریان سیال نه بوجود می‌آیند و نه از بین می‌روند، تنها نحوه پخش‌ این خاصیت­های اساسی تغییر می‌کند و یا اینکه این خاصیت‌ها به یکدیگر تبدیل می‌شوند[[40]](#footnote-40). قانون دوم ترمودینامیک به این نکته اشاره دارد که خاصیت اساسی آنتروپی هیچگاه کاهش نمی‌یابد. معادله حالت نیز به طور واضح نوع و طبیعت گاز را توصیف می‌نماید. اعمال نمودن تاثیر ویسکوزیته در معادلات بقای مومنتم و انرژی معادلات ناویر استوکس[[41]](#footnote-41) را برای جریان تراکم پذیر ارائه می‌دهد که کاملترین معادلات برای بیان دینامیک گازها می‌باشند.

از آنجا که شکل تنسوری معادلات ناویر-استوکس در بیشتر منابع معتبر مورد استفاده قرار گرفته و همچنین برای معادلات متوسط گیری شده رینولدز و بیان معادلات مربوط به مدلسازی توربولانسی نیز مناسب­تر است، در اینجا این شکل از معادلات استفاده می­گردد. شکل تنسوری معادلات ناویر-استوکس بصورت زیر می­باشد:

|  |  |
| --- | --- |
| (285) |  |
| (286) |  |
| (287) |  |

**تذکر :**

سرعت شبکه مورد نظر می باشد. باقی ترم های موجود در معادلات (285) تا ‏0(287) تعریف شده اند.

**مراجع**

1. Bardina, J., et al. *Turbulence modeling validation*. in *28th Fluid dynamics conference*. NASA Technical Memorandum 1997.

2. Montgomery, R., *Viscosity and thermal conductivity of air and diffusivity of water vapor in air.* Journal of Meteorology, 1947. **4**(6): p. 193-196.

3. Cueto-Felgueroso, L., et al., *Finite volume solvers and moving least-squares approximations for the compressible Navier–Stokes equations on unstructured grids.* Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2007. **196**(45-48): p. 4712-4736.

4. *Acknowledgments A2 - Blazek, Jiri*, in *Computational Fluid Dynamics: Principles and Applications (Third Edition)*. 2015, Butterworth-Heinemann: Oxford. p. ix.

5. Thompson, P.A., *Compressible-fluid dynamic*. 1971: McGraw-Hill.

6. Pletcher, R.H., J.C. Tannehill, and D. Anderson, *Computational fluid mechanics and heat transfer, Series in computational and physical processes in mechanics and thermal sciences*. 1997, Taylor & Francis.

7. Deardorff, J.W., *A numerical study of three-dimensional turbulent channel flow at large Reynolds numbers.* Journal of Fluid Mechanics, 1970. **41**(2): p. 453-480.

8. Kim, J. and P. Moin, *Application of a fractional-step method to incompressible Navier-Stokes equations.* Journal of computational physics, 1985. **59**(2): p. 308-323.

9. Fröhlich, J. and W. Rodi, *Introduction to large eddy simulation of turbulent flows.* Closure strategies for turbulent and transitional flows, 2002. **1**(8): p. 197-224.

10. Deconinck, W., *Design and application of discrete explicit filters for large eddy simulation of compressible turbulent flows*. 2008.

11. Salvetti, M.V., et al. *A numerical method for large-eddy simulation on unstructured grids*. in *Proceedings of Contact Forum KVAB (Flamish Science Academy), Modern Techniques for Solving Partial Differential Equations*. 2008.

12. Versteeg, H.K. and W. Malalasekera, *An introduction to computational fluid dynamics: the finite volume method*. 2007: Pearson Education.

13. Ekaterinaris, J.A., *High-order accurate, low numerical diffusion methods for aerodynamics.* Progress in Aerospace Sciences, 2005. **41**(3-4): p. 192-300.

14. Correa, C.D., R. Hero, and K.-L. Ma, *A comparison of gradient estimation methods for volume rendering on unstructured meshes.* IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 2011. **17**(3): p. 305-319.

15. Barth, T. and P. FREDERICKSON. *Higher order solution of the Euler equations on unstructured grids using quadratic reconstruction*. in *28th aerospace sciences meeting*. 1990.

16. Abgrall, R., *On essentially non-oscillatory schemes on unstructured meshes: analysis and implementation.* Journal of Computational Physics, 1994. **114**(1): p. 45-58.

17. Durlofsky, L.J., B. Engquist, and S. Osher, *Triangle based adaptive stencils for the solution of hyperbolic conservation laws.* Journal of Computational Physics, 1992. **98**(1): p. 64-73.

18. Ollivier-Gooch, C.F., *Quasi-ENO schemes for unstructured meshes based on unlimited data-dependent least-squares reconstruction.* Journal of Computational Physics, 1997. **133**(1): p. 6-17.

19. Friedrich, O., *Weighted essentially non-oscillatory schemes for the interpolation of mean values on unstructured grids.* Journal of computational physics, 1998. **144**(1): p. 194-212.

20. Hu, C. and C.-W. Shu, *Weighted essentially non-oscillatory schemes on triangular meshes.* Journal of Computational Physics, 1999. **150**(1): p. 97-127.

21. Collins, E.M., *On mesh quality considerations for the discontinuous Galerkin Method*. 2009: Mississippi State University.

22. Harris, R.E. and Z. Wang, *High-order adaptive quadrature-free spectral volume method on unstructured grids.* Computers & Fluids, 2009. **38**(10): p. 2006-2025.

23. Rango, S.D. and D. Zingg, *Higher-order spatial discretization for turbulent aerodynamic computations.* AIAA journal, 2001. **39**(7): p. 1296-1304.

24. Zingg, D., et al., *Comparison of several spatial discretizations for the Navier–Stokes equations.* Journal of computational Physics, 2000. **160**(2): p. 683-704.

25. Barth, T.J., *Aspects of unstructured grids and finite-volume solvers for the Euler and Navier-Stokes equations.* 1992.

26. Delanaye, M. and J. Essers, *Quadratic-reconstruction finite volume scheme for compressible flows on unstructured adaptive grids.* AIAA journal, 1997. **35**(4): p. 631-639.

27. *Copyright A2 - Blazek, Jiri*, in *Computational Fluid Dynamics: Principles and Applications (Third Edition)*. 2015, Butterworth-Heinemann: Oxford.

28. Barth, T. and D. Jespersen. *The design and application of upwind schemes on unstructured meshes*. in *27th Aerospace sciences meeting*. 1989.

29. Burden, R.L. and J.D. Faires, *Numerical analysis: 4th ed*. 1989: PWS Publishing Co. 729.

30. Jameson, A., *Time integration methods in computational aerodynamics.* AFOSR Work Shop on Advances and Challenges in Time-Integration of PDEs. Providence, RI, 2003.

31. Hirsch, C., *Numerical computation of internal and external flows: The fundamentals of computational fluid dynamics*. 2007: Butterworth-Heinemann.

32. Jameson, A., *Numerical solution of the Euler equations for compressible inviscid fluids.* Numerical methods for the Euler equations of fluid dynamics, 1985. **1**.

33. Jameson, A., *Reflections on four decades of CFD -A personal perspective.* A symposium celebrating the careers of Antony Jameson, Phil Roe and Bram van Leer,San Diego, 2013.

34. Hoffmann, K.A. and S.T. Chiang, *Computational Fluid Dynamics Volume I.* Engineering Education System, Wichita, Kan, USA, 2000.

35. Baldauf, M., *Stability analysis for linear discretisations of the advection equation with Runge–Kutta time integration.* Journal of Computational Physics, 2008. **227**(13): p. 6638-6659.

36. <https://en.wikipedia.org/wiki/Courant-Friedrichs-Lewy-condition>.

37. University, O.C.S., *Simulation of turbulent flow.*

38. Mavriplis, D.J. and A. Jameson, *Multigrid solution of the Navier-Stokes equations on triangular meshes.* AIAA journal, 1990. **28**(8): p. 1415-1425.

39. Eli, T., *Multistage schemes with multigrid for Euler and Navier-Stokes equations.* 1997.

40. Kadioglu, S.Y. and D.A. Knoll, *An IMEX method for the Euler equations that posses strong non-linear heat conduction and stiff source terms (radiation hydrodynamics)*, in *Hydrodynamics-Advanced Topics*. 2011, InTech.

1. خاصیت جرم از این قاعده مستثنی است و به خاصیت‌های اساسی دیگر تبدیل نمی‌گردد. [↑](#footnote-ref-1)
2. Navier-Stokes [↑](#footnote-ref-2)
3. Strain Tensor [↑](#footnote-ref-3)
4. Sutherland [↑](#footnote-ref-4)
5. Mean-Strain [↑](#footnote-ref-5)
6. turbulent heat flux [↑](#footnote-ref-6)
7. Sub-grid scale [↑](#footnote-ref-7)
8. Dear droff [↑](#footnote-ref-8)
9. Kim [↑](#footnote-ref-9)
10. Moin [↑](#footnote-ref-10)
11. Periodic [↑](#footnote-ref-11)
12. Reynolds Averaged Navier – Stokes (RANS) [↑](#footnote-ref-12)
13. Direct Numerical Simulation (DNS) [↑](#footnote-ref-13)
14. Grid Scale [↑](#footnote-ref-14)
15. Box filter [↑](#footnote-ref-15)
16. Gaussian [↑](#footnote-ref-16)
17. Favre Filtering [↑](#footnote-ref-17)
18. Truncation Error [↑](#footnote-ref-18)
19. Filter Grid Ratio(FGR) [↑](#footnote-ref-19)
20. Numerical Diffusion [↑](#footnote-ref-20)
21. Inertial Sub-layer [↑](#footnote-ref-21)
22. Eddy viscosity models [↑](#footnote-ref-22)
23. Density Based [↑](#footnote-ref-23)
24. Pressure based [↑](#footnote-ref-24)
25. Cell-Center [↑](#footnote-ref-25)
26. Cell-Vertex [↑](#footnote-ref-26)
27. Edge-Based [↑](#footnote-ref-27)
28. Cell-Based [↑](#footnote-ref-28)
29. Hybrid Mesh [↑](#footnote-ref-29)
30. Finite Difference Method [↑](#footnote-ref-30)
31. Local truncation error [↑](#footnote-ref-31)
32. Carl Runge [↑](#footnote-ref-32)
33. Martin Wilhelm Kutta [↑](#footnote-ref-33)
34. Runge-Kutta-Fehlberg [↑](#footnote-ref-34)
35. Adams-Bashforth [↑](#footnote-ref-35)
36. Grid independency [↑](#footnote-ref-36)
37. Von Neumann [↑](#footnote-ref-37)
38. Amplification Factor [↑](#footnote-ref-38)
39. Stiff [↑](#footnote-ref-39)
40. خاصیت جرم از این قاعده مستثنی است و به خاصیت‌های اساسی دیگر تبدیل نمی‌گردد. [↑](#footnote-ref-40)
41. Navier-Stokes [↑](#footnote-ref-41)